MATEMÁTICA

3ª SÉRIE
VOLUME V

SUMÁRIO

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Probabilidade

Objetivos de aprendizagem:

• Estruturar as noções de Espaço Amostral, Evento e Probabilidade;

• Resolver problemas iniciais de probabilidade;

• Reconhecer a dependência ou a independência de eventos;

• Perceber como elas afetam o cálculo de probabilidade condicionais;

• Utilizar conectivos "e" e "ou" para tratar de probabilidades com mais de um evento.

Praticando:

1) Temos que os casos favoráveis são A = {233, 234, 235,236, 237}, logo n(A) = 5. Como o total de possibilidades (espaço amostral) são os números de 1 a 100 temos que n (B) = 1000, logo temos que

$$P(A)= \frac{n\,(A)}{n\,(B)} = \frac{5}{1.000} = \frac{1}{200}$$

Gabarito: E

2) Temos 4 letras, A, M, O e R, então a probabilidade de ser primeiro retirado a letra A é 1/4. Após a retirada da letra A restam 3 letras, logo a probabilidade de ser retirada a letra M é 1/3. Agora restam 2 letras, logo a probabilidade de retirar a letra O é 1/2. Após isso, só resta a letra R, então a probabilidade de ser retirada a letra R é 1/1 = 1. Como todos esses eventos devem ocorrer um após o outro, temos que a probabilidade de termos retirado a palavra AMOR é 1/4 . 1/3 . 1/2 . 1/1 = 1/24.

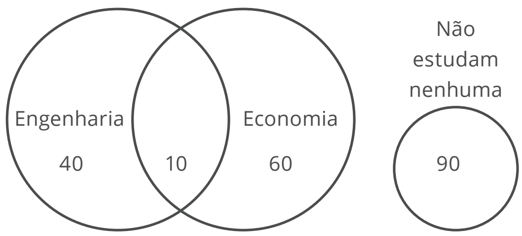
Gabarito: A

3) Temos um total de 9 bolas (espaço amostral) sendo 5 pretas (casos favoráveis). Então a probabilidade de ser retirado uma bola preta na primeira vez é 5/9. Agora, restam 4 bolas pretas e 8 bolas no total, então a probabilidade de a segunda bola ser preta é 4/8. Portanto, a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas é 5/9 . 4/8 = 5/18.

4) Nenhum mês possui 32 dias, este é um evento impossível, portanto a probabilidade é 0.

Gabarito: E

5) Temos que 10 alunos cursam Engenharia e Economia, então podemos concluir que 50 – 10 = 40 estudam somente Engenharia e que 70 – 10 = 60 estudam somente Economia. Como há 200 alunos no total e temos 110 alunos que estudam Engenharia e/ou Economia, pode-se concluir que 90 não estudam nenhuma desses cursos, ou seja:



a) Temos que 40 alunos estudam somente Engenharia num total de 200 alunos, então a probabilidade é 40/200 = 1/5

b) Temos que 90 alunos não estudam Engenharia nem economia num total de 200 alunos, então a probabilidade é 90/200 = 9/20.

c) Temos que 110 alunos estudam Engenharia ou economia num total de 200 alunos, então a probabilidade é 110/200 = 11/20.

6) Como a probabilidade de não chover é 70% então a probabilidade de chover é 30%. Com isso, ele não irá à praia.

Gabarito: C

7) Temos que banda larga de pelo menos 1mbps podem ser as banda largas de 1 a 2 mbps, 2 a 4 mbps, de 4mbps a 8 mbps e acima de 8 mbps, então pelo gráfico temos 15 + 5 + 1 + 1 = 22. Como o total de uso dos tipos de internet é 34+ 20 + 15 + 5 + 1 + 1 + 24 = 100, podemos concluir que a probabilidade é 22/100 = 0,22.

Gabarito: D

8) Analisando o gráfico, podemos concluir que a quantidade total de filhos é 8.0 + 7.1 + 6.2 + 2.3 = 25. Como há 7 filhos únicos, a probabilidade de ser sorteado um filho único é 7/25.

Gabarito: E

Habilidades do ENEM:

9) Analisando-se o quadro de horários contínuos de partida, pode-se perceber que Carlos, se chegar nos 10 minutos após a hora cheia, tomará o ônibus da empresa BOMPASSEIO. Se chegar nos próximos 20 minutos, vai tomar o ônibus da empresa ANDABEM. Essa situação vai se repetir durante a próxima meia hora e assim por sucessivamente. Portanto, podemos concluir que a probabilidade de que Carlos pegue o ônibus da empresa Bom Passeio é o dobro da Anda Bem.

Gabarito: D

10) a) Temos que o total de pessoas é 10 + 20 = 30. Como temos 20 homens a probabilidade de ser escolhido ao acaso um homem é 20/30 = 1/3.

b) Seja M = conjunto das pessoas de sexo masculino e A = conjunto das pessoas de olhos azuis. Queremos saber qual a probabilidade de uma pessoa de olhos azuis ser do sexo masculino. Então, o espaço amostral é o conjunto A, logo pela tabela n(A) = 6. Como existe um homem do sexo masculino e com olhos azuis temos que n (M/A) = 1, portando P (M/A) = 1/6.

11) Temos um total de 9 bolas (espaço amostral) sendo 5 pretas (casos favoráveis). Então a probabilidade de ser retirado uma bola preta na primeira vez é 5/9. Agora, restam 4 bolas pretas e 8 bolas no total, então a probabilidade de a segunda bola ser preta é 4/8. Portanto, a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas é 5/9 . 4/8 = 5/18.

12) a) Como há 5 bolas pretas e 4 bolas brancas no total temos 9 bolas. Podemos concluir que na primeira retirada a probabilidade de ser retirada uma bola preta é 5/9. Como há reposição, na segunda retirada, a probabilidade de ser retirada uma bola branca é de 4/9. Logo, como esses eventos são independentes, a probabilidade do evento do item ocorrer é 5/9 . 4/9 = 20/81.

b) Nesse caso, a ordem de retirada das bolas não é definida, então há dois casos a se considerar: primeiro preta e depois branca; e primeiro branca e depois preta. Pelo ítem a) temos que a probabilidade de ser retirada primeiro uma bola preta e depois uma bola branca é 20/81. Para primeiro branca e depois preta é análogo, ou seja,= 4/9 . 5/9 = 20/81. Como pode ocorrer um evento ou outro devemos somar as probabilidades, portanto teremos que a probabilidade em questão é 20/81 + 20/81 = 40/81.

13) Sabemos que o teste tem 10 questões e cada uma com 4 opções de resposta. Como somente uma opção de cada questão é correta temos que em uma questão a probabilidade de acerto é 1/4 e a de erro 3/4. Como é desejado que ele acerte exatamente 7 questões deverá haver 7 questões certas e 3 erradas. Devemos considerar a disposição delas que será uma combinação, ou seja, 10! ÷ 7! 3! então a probabilidade desse evento ocorrer é 1/4 . 1/4 . 1/4 . 1/4 . 1/4 . 1/4 . 1/4 . 3/4 . 3/4 . 3/4 . 10!7!3! = 3^3 . 10! / 7! . 3! . 4^{10}.

Gabarito: B

14) Como os filhos só podem ser homens ou mulheres, temos que o total de possibilidades de se ter 3 filhos será 2.2.2 = 8. Entretanto, como o casal deseja ter exatamente 2 filhos do sexo masculino e 1 feminino, temos que a possibilidades de ordem do nascimento deles será uma combinação, ou seja, 3!/2!1! = 3. Logo a probabilidade desse evento ocorrer será 3/8 = 0,375 = 37.5%.

Gabarito: E

15) Como cada usuário escolherá apenas uma sala a probabilidade desse evento ocorrer será 1/15 . 1/15 = (1/15).2

Gabarito: A

16) A quantidade total de mosquitos é 30 + 60+ 10 = 100. Como é desejado obter pelo menos um mosquito contaminado com DEN3, entre dois mosquitos, é preciso separar esse evento em dois casos: exatamente 1 mosquito com DEN3 E dois mosquitos com DEN3.

Caso 1

A probabilidade de um mosquito ter DEN3 é 10/100 e após a primeira escolha a probabilidade de não ter DEN3 é 90/99. Devemos considerar a ordem dessas escolhas, ou seja, temos uma combinação 2!/1!.1! = 2. Logo nesse caso a probabilidade será 2.10/100 . 90/99 = 18/99 = 2/11.

Caso 2

A probabilidade de um mosquito ter DEN3 é 10/100 e após a primeira escolha a probabilidade de ter DEN3 novamente será 9/99. Portanto, neste caso a probabilidade será 10/100 . 9/99 = 1/110.

Como pode ocorrer o caso 1 ou o caso 2 devemos somar essas probabilidades, então a probabilidade desse evento ocorrer será 2/11 + 1 /110 = 21/110.

Gabarito: D

17) a) Como 20% é a probabilidade de um paciente morrer, 80% é a probabilidade de um paciente sobreviver. Como é esperado que dentre 3 pacientes todos sobrevivam temos que a probabilidade desse evento ocorrer será 0,8 . 0,8 .0,8 = 0,512 = 51,2 %.

b) Nesse caso, devemos considerar a disposição dos acontecimentos então teremos uma combinação, ou seja, 3!/2!1! = 3. Então a probabilidade será 3 . 0,8. 0,8 . 0,2 =0,384 = 38,4%.

18) Ao retirar um lápis do porta-lápis A deve considerar os dois casos, retirar um lápis com ponta ou retirar um lápis sem ponta.

No primeiro caso, como no porta-lápis A há 10 lápis sendo 3 com ponta, a probabilidade de retirar um com ponta é 3/10 = 0,3. Agora o porta-lápis B passa a ter 10 lápis, dos quais 5 estão sem ponta, logo a probabilidade de retirar um lápis sem ponta do porta-lápis B é 5/10 = 0,5. Entretanto, como os eventos das retiradas dos lápis são eventos dependentes, temos que a probabilidade desse caso ocorrer é 0,3. 0,5 = 0,15.

Já no segundo caso, como no porta lápis A há 10 lápis sendo 7 sem ponta, a probabilidade de retirar um lápis sem ponta será 7/10 = 0,7. Ao colocá-lo no porta-lápis B, este passa a ter 10 lápis no total sendo 6 sem ponta, logo a probabilidade de retirar um lápis sem ponta será 6/10=0,6. Como as retiradas de lápis são eventos dependentes temos que a probabilidade desse caso ocorrer será 0,7. 0,6 = 0,42.

Como a ocorrência desses casos são eventos independentes, podemos concluir que a probabilidade do evento em questão ocorrer será 0,15 + 0,42 =0,57,

Gabarito: B.

Habilidades do ENEM:

19) Para que a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero, é necessário que exista pelo menos uma bola em cada uma das cinco linhas. Se neste cartão tem duas bolas na linha 4 e duas na linha 5, cada uma das três bolas restantes deve estar nas linhas 1, 2 ou 3. Então a probabilidade de acerto para o cartão todo será o produto das probabilidades de cada linha. Logo, analisando linha a linha, temos as seguintes probabilidades: linha 1 = 1 / 3, linha 2 = 1 / 4, linha 3 = 1 / 3, linha 4 = 2 / 3, linha 5 = 2 / 2 = 1. Portanto, a probabilidade desse evento ocorrer será P = 1/3 . 1/4 . 1/3 . 2/3 . 1 = 2/108 = 1/54.

Gabarito: C.

Aprofundando:

20) Gabarito: D.

21) Letra D.

22) Analisando a figura podemos perceber que há 208 poltronas, das quais são acentos entre dois acentos 64. Logo a probabilidade de uma poltrona desse tipo ser sorteada é 64/208 = 0,308= 30,8 %, ou seja, aproximadamente 31%.

Gabarito: A

23) Podemos perceber pela tabela que há 100 pacientes doentes, dos quais 95 obtiveram teste positivo. Logo a probabilidade relativa a sensibilidade do teste é 95/100 = 95%.

Gabarito: E

24) No total temos 6 países, como há 3 países na tabela América do Norte, a probabilidade de se escolher primeiro um país desse continente será 3/6. Agora temos 5 países e como há 3 países na tabela Ásia a probabilidade será 3/5. Logo, a probabilidade desse evento ocorrer será 3/6 . 3/5 = 3/10.

Gabarito: C

25) Na linha 1, o jogador deverá marcar as letras A, D e E. Como há 5 letras, a probabilidade dele escolher a primeira letra será 3/5, a segunda 2/4 e a terceira 1/3. Logo a probabilidade da linha 1 será 3/5 . 2/4. 1/3 = 1/10

Na linha 2, o jogador deverá escolher a letra I, como há 5 letras a probabilidade será 1/5.

Na linha 3, o jogador deverá escolher as letras O, N e L, logo como há 5 letras a probabilidade será análoga a linha 1, ou seja, 1/10

Na linha 4, o jogador deverá escolher as letras R e T, logo como há 5 letras a probabilidade de ele escolher a primeira letra será 2/5 já a segunda letra ¼, logo a probabilidade da linha 4 será 2/5 .1/4 =1/10

Na linha 5, o jogador deverá escolher a letra V, como há 3 letras probabilidade será 1/3.

Portanto, a probabilidade desse evento ocorrer será dependente das escolhas de cada linha, ou seja 1/10 . 1/5 . 1/10 . 1/10 . 1/3 =1/15000.

Gabarito: A.

26) Ao retirar qualquer cor da urna 1 a probabilidade de se retirar a cor vermelha da urna 2, como haverá 11 bolas, será 4/11. Entretanto, a probabilidade de se retirar uma bola verde da urna 1 é 1/10, ao colocá-la na urna 2 a probabilidade de se retirar uma bola verde será 1/10. 4/11 = 2/55. Logo, a cor vermelha é a cor que tem maior probabilidade de acerto.
Gabarito: E

27) Gabarito: E

28) Como há 9% que gosta de horóscopo e o total de entrevistados é 100%, temos que o percentual de quem não gosta de horóscopo será 100% – 9% = 91% = 0,91.
Gabarito: E

29) Gabarito: B

30) Gabarito: C

31) Podemos perceber que para o entrevistador ser respondido é necessário que pelo menos um dos entrevistados fale inglês. Então basta calcular a probabilidade de nenhum falar inglês e subtrair do total, ou seja, 0,7 . 0,7 . 0,7 = 0,343, então 1 – 0,343 = 0,657 = 65,7 % é a probabilidade de o entrevistador ser respondido.
Gabarito: D

32) Gabarito: B

33) Pelo gráfico pode-se perceber que 36% vivem na rua devido a alcoolismo e drogas e que 16% vivem na rua devido a decepções amorosas, somando esses percentuais obtemos 52%. Como o enunciado diz que 40% é referente a pessoas que pertencem aos grupos P ou Q. A interseção desses grupos será 52% – 40% = 12%.
Gabarito: A

34) Há 180 peças defeituosas das quais 60 foram produzidas pela máquina M. Então a probabilidade desse evento ocorrer será 60/180 = 1/3
Gabarito: C.

35) O total de culturas que germinam é 773 das quais os referentes a cultura A equivalem a 392, então a probabilidade desse evento ocorrer será 392/773.
Gabarito: D.

36) Analisando a tabela temos que há 200 pessoas com problemas respiratórios causados pelas queimadas das quais 150 são crianças. Então a probabilidade desse evento ocorrer será 150/200 = 75/100 = 0,75
Gabarito: E

37) Gabarito: B

Habilidades do ENEM:

38) Ao montar uma tabela com as informações do enunciado temos:

Ratos	Positivo	Negativo	Total
Com doença	60	40	100
Sem doença	20	380	400
Total	80	420	500

Com isso, podemos perceber que há 420 ratos com resultado negativo, dos quais 380 não tem a doença, ou seja, são saldáveis. Logo a probabilidade desse evento ocorrer será 380/420 =19/21.
Gabarito: C

Desafiando:

39) k = 15

40) Podemos perceber que P2 = 3P1 e P3= 2P2 = 2.(3P1)= 6P1, com isso podemos afirmar que a probabilidade total dessa área a ser acertada será A = P1 + P2 + P3 = 10P1. Logo, como os lançamentos são independentes e a probabilidade de acertar a área 1 é P1/10P1 temos que a probabilidade desse evento ocorrer será P = P1/10P1 . P1/10P1 = 1/10 . 1/10 = 1/100 = 1%.

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Sequências: progressões aritméticas e geométricas

Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer padrões na formação de sequências numéricas;
- Definir conceitos, propriedades e relações de uma progressão aritmética;
- Definir conceitos, propriedades e relações de uma progressão geométrica;
- Assimilar as recorrentes formas de diferenciar uma PA de uma PG;
- Resolver problemas de sequências numéricas aplicando tais conceitos.

Praticando:

1) a) $a_n = 6n + 4$

$n=1 \rightarrow a_1 = 6.1+4 = 10$

$n=2 \rightarrow a_2 = 6.2 + 4 = 16$

$n= 3 \rightarrow a_3 = 6.3 + 4 = 22$

$n=4 \rightarrow a_4 = 6.4 + 4 = 28$

b) $a_1 = -1$

$a_n = (a_n - 1 + 1)2$

$n=2 \rightarrow a_2 = (a1 + 1)^2 = (-1 + 1)^2 = 0$

$n= 3 \rightarrow a_3 = (a2 + 1)^2 = (0 + 1)^2 = 1$

$n=4 \rightarrow a_4 = (a3 + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 4$

$n= 5 \rightarrow a_5 = (a4 + 1)^2 = (4 + 1)^2 = 25$

2) Sabe-se que uma PA tem $a_1 = -3$ e $r= 3/2$. Então, substituindo essas informações na fórmula geral temos que $a_{39} = a_1 + (39 - 1).r = -3 + 38 . 3/2 = 54$.

3) Nesse caso a razão será 3, como passaram 20 dias temos que n = 20. Como no primeiro dia foram produzidas 5, $a_1 = 5$. Então, no vigésimo dia teremos $a_{20} = a_1 +(20 - 1).r = 5 + 19.3 = 62$.

4) Temos que a razão será 3. Como ele fará a manutenção dos km 20 a 100, temos que a primeira placa será no km 21 e a última placa no km 99, pois as placas estão nos km múltiplo de 3. Então a1 = 21 e $a_n = 99$, substituindo na fórmula geral da PA temos que an=aqui +(n – 1).r -> 99 = 21 +(n+1).3 -> 26= n +1 -> n =25. Logo, 25 placas terão manutenção.

5) Temos que n = 11, $a_1 =1$ e $a_{11} = 37$. Substituindo na formula do termo geral podemos encontrar a razão, logo $a_{11} = a_1 + (11 - 1) . r \rightarrow 37 = 1 + (11 + 1) . r \rightarrow r = 3$.

6) Seja a_n o número de poltronas na enésima fileira, sabemos que $a_7 + a_{12} =52$ e $a_5 + a_{23} = 70$. Então pela formula do termo geral, $2a_1 + 17r = 52$ e $2a_1 + 26r = 70$, subtraindo uma equação da outra obtemos que 9r = 18, então r = 2. Portanto, $2a_1 + 17.2 = 52 \rightarrow a_1 =9$. Logo, na vigésima fileira teremos $a_{20} = 9 + 19.2 \rightarrow a_{20} = 47$.

7) Na P.A. (x – 1, 1 – 7x, 3x – 11), temos que r = 1 - 7x – (x – 1) = 3x – 11 – (1 – 7x) então 2 – 8x = 10x – 12, logo 18x = 14 -> x = 7/9.

8) 175/6 medidas de trigo.

9) R$ 63,10

Habilidades do ENEM:

10) Podemos perceber que a razão dessa PA é r = 1,25. Sabendo que $a_1 = 50,25$ e que n = 1 é referente a 2012 então n= 10 é referente a 2021, portanto $a_{10} = 50,25 + 9.1,25 = 61,5$, logo a soma dos 10 termos dês PA será $S = (a_1+a_{10}).10/2 = (50,25 +61,5).5 = 558,75$.

Gabarito: D

11) Temos que q = 2, e $a_1 = 1\ m^3$ logo substituindo na formula do termo geral temos $a_{10} = 1.\ 2^9 = 512m^3$.

Gabarito: D

12) Na meia-vida q=1/2 e como o tempo de meia vida é 20h em 100h teremos 5 meias-vida, logo como m0 = 2g teremos que $m_f = 2 . (1/2)^5 = 0,0625$ g = 62,5mg.

Gabarito: A

13) Se $a_1 = 20g$ e $a_2 =50$, podem afirmar que $a_2/a_1 = a_3/a_2 \rightarrow 50/20 = a_3/50 \rightarrow a_3 = 125$.

14) Podemos afirmar que $y = a_0 . 2^x$ é a função que expressa a quantidade de bactérias (y) a partir de uma amostra a_0 em função do tempo x em horas. Se $Q = a_0 . 2^{24}$ então $Q/2 = a_0 . 2^{24}/2 = a_0 .2^{23}$, então podemos concluir que para trem Q/2 serão necessárias 23 horas.

15) 1093 frutos.

16) Podemos separar os termos positivos e negativos dessa PG e formar duas PGs, ou seja, (1, 1/4, ...) e (– 1/2, – 1/8, ...) onde q = 1/4 é a razão de ambas. A soma infinita da PG inicial será igual a soma das somas das PGs mencionadas agora, isto é, $S = S_1 + S_2$. Como, $S_1 = 1/ (1 – 1/4) = 4/3$ e $S_2 = – 1/2 /(1 – 1/4) = - 2/3$ temos que S= 4/3 – 2/3 = 2/3. Então a soma dessa PG é 2/3.

17) Podemos reescrever 0,888... como 8/10 + 8/100 +8/1000+...., logo temos uma soma infinita de razão q= 1/10 e a1= 8/10. Portanto, substituindo na formula de soma infinita temos, S= 8/10 / (1-1/10) = 8/9 é a fração geratriz dessa dízima.

18) Seja a_n a área da figura obtida no enésimo passo, temos que $a_1 = k^2$, $a_2 = k^2/3$, $a_3 = k^2/9$ e assim por diante, então podemos afirmar que q=1/3. Logo, usando a formula de soma infinita, temos que $S= k^2 /(1 – 1/3) = 3k^2/2$.

Habilidades do ENEM:

19) E

Aprofundando:

20) Como $a_n = 10 – 4n$, então os cinco primeiros termos serão:

a_1= 10 – 4 . 1 = 6

a_2= 10 – 4 . 2 = 2

a_3= 10 – 4 . 3 = – 2

a_4= 10 – 4 . 4 = – 6

a_5=10 – 4 . 5 = – 10

21) $a_1 = 2$

$a_2 = 2/2 + 1 = 2$

$a_3 = 2/2 +1 = 2$

Gabarito: 8

22) a) $a_{14} = a_1 + 13r = 4 + 13.1/2 = 21/2$

b) $a_{22} = a_1 + 21r = 4 + 21.1/2 = 29/2$

c) $a_{17} = a_1 + 16r = 4 + 16.1/2 = 12$

d) $a_{51} = a_1 + 50r = 4 + 50.1/2 = 29$

23) 5

24) Como $a_1 + a_{15} = 48$ temos, pela equação do termo geral, que $2a_1 + 14r = 48 \rightarrow a_1 + 7r = 24 \rightarrow a_8 = 24$. Por outro lado, pode-se notar que $a_3 + a_5 + a_{11} + a_{13} = 4a_1 + 28r = 4 (a_1 +7r) = 4.a_8 = 4.24 = 96$.

25) Sabemos que $a_{16} = 103$ e $a_{31}=58$ então, pela fórmula do termo geral, $a_1 + 15r = 103$ e $a_1 + 30r= 58$. Subtraindo uma equação da outra obtemos que 15r = –45, então r = –3. Com isso, a_1 + 30.(–3) = 58, então a_1 = 148. Logo, podemos concluir que a última ficha é a_{50} = 148 +49.(–3), então a_{50} = 1.

26) Sabemos que AB = BC + 10 e BC = CD + 10, ou seja, AB = CD + 20. Então, como o problema nos diz que AD = 390, podemos concluir que AD= AB+ BC + CD = 390, logo substituindo as relações encontradas primeiramente obtemos que 3CD + 30 = 390 -> CD= 120. Logo, AB= 140 e BC= 130. Como AB, BC E CD estão em progressão aritmética nessa ordem, podemos perceber que a razão será r = –10. Portanto, o vigésimo termo dessa PA será a_{20} = 140 + 19.(–10) = – 50.

Gabarito: A

27) Gabarito: A

28) Sabemos que a soma das parcelas será S = 42.000,00 e que a segunda prestação será a_2 = 3.800 então podemos dizer que $a_1 = a_2 – r$ = 3.800 –r. Como o valor foi pago em 20 parcelas, pela formula do termo geral podemos concluir que a20= a_1 + 19r, como $a_2 = a_1 + r$, podemos reescrever a20= a2 + 18r = 3.800 + 18r. Por outro lado, como S = 42.000 = (a1 + a_{20}).20/2 obtemos que 42.000 = (3.800 - r + 3.800 + 18r).10 logo, r = -200.

Gabarito: B.

29) Sabendo que a1 = 5x – 5, a_2 = x + 14 e a_3 = 6x – 3 temos que r = a_2 – a1 = $a_3 – a_2$, então x + 14 – (5x – 5)= 6x – 3 – (x+ 14), logo –4x + 19 = 5x –17 portanto x = 4. Como S= a1 + $a_2 + a_3$ = 12x + 6 temos que S = 54.

Gabarito: B.

30) Como a razão é um número inteiro, temos que 1 não pode ser a razão, pois se não ela haveria apostado um único número. Analisando o numero 2 como razão, podemos perceber que 2^5 = 32 e 26 = 64. Analisando q > 2 podemos per-

ceber que não teremos seis potencias menores que 60. Logo, 2 será a razão e a1=1 e a_6 =32.

Gabarito: A.

31) Temos que a_1 = 2, a_n = 98 e r = 2, logo substituindo na equação do termo geral temos que 98= 2 +(n–1).2 -> n = 49. Portanto a soma será S = (2+98).49/2 =2.450.

32) Temos que S_3 = (a_1 + a_3).3/2 = 21 e a_1 . a_2 . a_3 = 315. Utilizando a equação do termo geral podemos reescrever a_2 = a_1 +r e a_3 = a_1 + 2r logo, substituindo nas equações apresentadas, teremos a_1 + r = 7 e a_1.(a_1 +r).(a_1 + 2r) = 315, portanto substituindo a primeira relação na segunda equação temos que a_1 . 7. (7+ r) = 315 -> a_1 (7+r) = 45, como a_1 = 7 –r, vem que (7–r).(7+ r) = 45 -> 49 – r² = 45 -> r² = 4 -> r = 2 ou r = –2.

Se r = 2, temos que a_1 =5, a_2 = 7 e a_3 = 9.

Se r = –4, temos que a_1 = 9, a_2 = 7 e a_3 = 5.

33) Sabe-se que Sn = n_2 + n = n (n+1)

a) S_1 = (a_1 + a_1) . 1/2 = 12 + 1 -> a_1 = 2

b) Podemos perceber que S2 = (a_1 + a_2) . 2/2 = 2² + 2, como a_1 = 2 e a_2 = 2+ r temos que 4 + r = 6 -> r = 2.

34) Temos que a_1 = 1, r = 1 e n = 30, então substituindo na fórmula do termo geral temos que a_{30} = 1 + (30–1).1 = 30. Portanto, ao final de 30 dias S = (1+ 30). 30/2 = 465. Logo ele recebeu 465–300= 165 reais a mais do que a mesada.

35) Temos que a_1 = 2, r = 2 e a_n =100. Substituindo na equação do termo geral temos que 100=2+(n–1) . 2, logo n = 50. Então, usando a fórmula de soma de PA obtemos que S = (2+100) . 50/2 = 2.550 é quantidade de balas ingeridas nesse período.

36) Temos que nessa PA há 13 elementos, logo n = 13. Como S = 78, utilizando a fórmula de soma de PA obtemos que (a_1 +a_{13}).13/2 =78. Por outro lado, utilizando a equação do termo geral, podemos reescrever a_{13} = a_1 + 12.r, portanto S = (2a_1 + 12r).13/2 = 78, ou seja, a_1 + 6r = 78/13 = 6. Note que a_7 = a_1 + 6r, portanto a_7 = 6.

Gabarito: A

37) Seja n o número de unidades de milhar adquiridas e a_n o preço adicional pago pela enésima unidade de milhar, temos que r= –200 e a_1 =3.000, logo substituindo a equação do termo geral obtemos que a_8 = 3.000 + (8–1).(–200) = 3.000 – 1.400 =1.600. Então o preço total pago foi S= (3.000 +1.600).8/2 = 18.400 reais.

Gabarito: C.

38) Temos que a_1 =100 r = – 8, então substituindo na equação do termo geral obtemos que a_n = 100 +(n–1). (–8), ou seja an =108 – 8_n . Sabe-se que o valor mínimo de a_n deve ser maior que 0, logo podemos concluir que a_n > 0, logo 108 – 8n >0, isto é, n < 13,5, como o primeiro inteiro menor que 13,5 é 13, temos que n = 13. Portanto a_n = 4.

Gabarito: C.

39) Seja a_n o número de cadeiras no conjunto de n mesas e n o número de mesas, pode-se observar que a_1= 4 e r = 2. Então, utilizando a fórmula do termo geral, quando utilizar 50 mesas terão a_{50} = 4 + (50–1).2 = 102 cadeiras.

Gabarito: A.

40) Sabe-se que (3, a, b) estão em PG, então podemos afirmar que a/3 = b/a, ou seja, a² = 3b. Por outro lado, (a, b, 9) estão em PA, logo b–a = 9–b, ou seja, 2b – 9 = a. Substituindo esta relação na primeira encontrada, obtemos que (2b – 9)² = 3b, logo 4b² –36b + 81 = 3b, isto é, 4b² –39b + 81 = 0. Portanto, usando a formula de bhaskara, b = 3 ou b = 6.75. Se b = 3, temos que a = –3. Se b = 6.75, temos que a = 4.5.

41) Pode-se observar que nessa PG a_1 = 5, a_n = 10.240 e q = 2. Então, substituindo essas informações na equação do termo geral temos que 10.240 = 5. 2^{n-1}, 2^{n-1} = 2.048, portanto 2^n = 4096 = 212, logo n = 12.

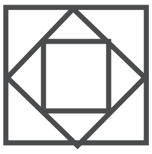
42) Temos que n = 4 e a_1 = 36 e a_4 = 9/8. Então, utilizando equação do termo geral obtemos que 9/8 = 36.q³, ou seja, q³ = 1/32 portanto q = $\sqrt[3]{1/32}$

43) Reescrevendo a_1, a_3, a_2 e a_4, com a equação do termo geral, obtemos que a_2 = a_1 .q, a^3 = a^1 . q² e a_4 = a_1 . q³. Então, a_1 + a_3 = a_1 + a_1 . q² = 100, isto é, a_1(1 + q²) =100 logo (1+ q²) = 100/a_1. Por outro lado, temos que a_2 + a_4 = a1.q + a1.q³ = 300, ou seja, a_1.q (1+ q²) = 300. Substituindo a primeira relação encontrada nesta última obtemos que a_1.q .100/a_1 = 300 logo, q = 3. Com isso, temos que a1(1+ 3²) = 100, a1= 10. Portanto, a_2 =30,a_3 = 90, a_4 = 270.

44) Sabe-se que $a_4 = 1$ e que $q = 2/3$, então substituindo essas informações na equação do termo geral temos que $a_4 = a_1 . (2/3)^3$, $1 = a_1 . 8/27$, $a_1 = 27/8$. Logo, $a_2 = a_1 . q = 27/8 . 2/3 = 9/4$, $a_1 = a_3 . q^2 = 27/8 . 4/9 = 3/4$.

45) Podemos observar que a soma dos termos dessa PG é infinita e que $a_1 = 4$ e $q = 1/4$. Portanto, utilizando a fórmula de soma infinita obtemos que S = 4 / (1 – ¼), logo S= 16/3.

46)



A figura acima representa a situação descrita no enunciado. Logo, seja a_n a área do enésimo quadrado dessa sequência, podemos notar que $a^1 = a^2$, $l1 = a$ e, por Pitágoras, $l22 = a^2/4 + a^2/4$, ou seja, $l2 = a\sqrt{2}/2$, com isso podemos afirmar que $a^2 = a^2/2$, logo $q = 1/2$. Portanto, usando a fórmula de soma infinita, temos que a soma das áreas dos quadrados dessa sequência será $S = a^2 / (1 – 1/2) = 2a^2$.

Habilidades do ENEM:

47) E

Desafiando:

48) C

49) Seja a_n a distância descrita pela bola antes de bater no chão depois de quicar, temos que $a_1 = 9$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, podemos notar que $q = 1/3$, então a distância percorrida pela bola até parar será a soma infinita dos termos dessa PG, então $S = 9 /(1 – 1/3) = 27/2 = 13,5$ m. Como a bola sobe e desce, ou seja, percorre duas vezes essa distância, a exceção do primeiro movimento, teremos: $27/2 . 2 – 9 = 18$ m

50) a) 3.

b) 53.

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Geometria espacial: prismas e cilindros

Objetivos de aprendizagem:

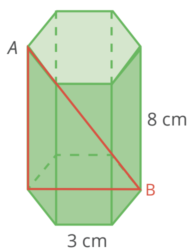
• Definir o que é um prisma, mostrando seus principais elementos, planificações e deduzindo os cálculos de áreas e volume;

• Definir o que é um cilindro, apresentando seus principais elementos, planificações e os cálculos de áreas e volumes;

• Construir cilindros a partir da revolução de figuras planas.

Praticando:

1) Observando o sólido, percebemos que a maior diagonal será o segmento AB e formando o triângulo retângulo em vermelho.



Como trata-se de um hexágono regular, então ele pode ser dividido em 6 triângulos equilátero, logo, a base desse triângulo vermelho vale 6 cm.

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo vermelho, temos: $6^2 + 8^2 = D^2 \Rightarrow D^2 = 100 \Rightarrow D = 10$

Gabarito: 10 cm.

2) A área lateral desse trapézio será a soma das áreas de todas as faces laterais, então teremos:

$A1 = 5 . 10 = 50 \text{ cm}^2$

$A2 = 6 . 10 = 60 \text{ cm}^2$

$A3 = 5 . 10 = 50 \text{ cm}^2$

$A4 = 12 . 10 = 120 \text{ cm}^2$

$AL = 50 + 60 + 50 + 120 = 280 \text{ cm}^2$

3) Como o volume de um paralelepípedo é calculado pelo produto de seus comprimento, largura e altura, para dobrar esse volume, basta dobrar uma de suas dimensões, logo, o gabarito só pode ser a letra D.

4) O volume de água deslocado pelo castelo é exatamente igual ao volume do castelo, logo, basta calcular o volume de água referente a altura do nível de água que subiu, assim, teremos:

15 cm = 0,15 m

$V = 1{,}2 . 0{,}6 . 0{,}15 = 0{,}108 \text{ m}^3 = 108 \text{ dm}^3$

Gabarito: C

5) O volume de água é o mesmo nas duas situações, logo, o volume vazio também será igual, então teremos:

$6 . 40 . 10 = x . 20 . 10$

$20x = 240$

$x = 12$ cm

Gabarito: A

6) Primeiro devemos encontrar as dimensões reais desse depósito, logo, teremos:

Altura: 0,9 . 500 = 450 cm = 4,5 m

Altura do telhado: 0,6 . 500 = 300 cm = 3 m

Comprimento: 7,2 . 500 = 3600 cm = 36 m

Largura: 3 . 500 = 1500 cm = 15 m

Agora, repare que esse galpão pode ser dividido em 2 prismas, sendo 1 de base retangular (a parte do telhado) e o outro sendo um paralelepípedo.

O volume da parte do telhado será dado por:

$A_b . h = \frac{15 . 3}{2} . 36 = 810 \text{ m}^3$

O volume do paralelepípedo será:

$A_b . h = 15 . 36 . 4{,}5 = 2430 \text{ m}^3$

O volume total será de $2430 + 810 = 3240 \text{ m}^3$

7) Calcularemos quanto de altura representa 4 m³ nesse tanque. Como as dimensões da base são 6 m e 5 m, teremos:

$6 . 5 . x = 4$

$X = \frac{4}{30} \rightarrow X = \frac{2}{15}$

Logo, a cada hora $\frac{2}{15}$ é cheio, assim, a função é dada por $f(x) \frac{2}{15} t$.

E esse tanque é totalmente cheio em $\frac{4/2}{15} =$ 30 minutos.

Gabarito: C

Habilidades do ENEM:

8) Como as torres possuem a mesma base e a mesma altura, seus volumes são iguais, logo, gabarito é letra D.

9) A área lateral do cilindro é dada por 2πrh, onde r é o raio e h a altura do cilindro. Assim, teremos:

$2.\ \pi.\ r.\ h = 100\pi$

Como a altura é igual ao diâmetro que é o dobro do raio, teremos:

$2.\ \pi.\ r.\ 2r = 100\pi$

$4r^2 = 100$

$r^2 = 25$

$r = 5$

A área das duas bases desse cilindro vai ser:

$A = 2.\ \pi.\ r^2 = 2.\ \pi.\ 5^2 = 50\ \pi\ cm^2$. Logo, a área total valerá $150\pi\ cm^2$.

10) Percebemos que o raio da circunferência da base do cilindro vale a metade da aresta da base do prisma, assim, o raio será igual a 4 cm e a altura do cilindro será igual a altura do prisma, assim:

$AL = 2.\ \pi.\ r.\ h = 2.\ \pi.\ 4.\ 12 = 96\ \pi\ cm^2$

11) Devemos calcular o volume de um cilindro de altura 10 cm, então encontraremos o volume pedido, assim:

$V = A_b\ .\ h = \pi r^2\ .\ h = \pi\ .\ 10^2.\ 10 = 1000\pi\ cm^3$

Gabarito: A

12) O volume da peça 1 é dado por:

$V1 = A_b\ .\ h = \pi r^2\ .\ h = \pi\ .\ 10^2\ .\ 10 = 1000\pi\ cm^3$

Já o volume da peça 2 é dado por:

$V_2 = A_b\ .\ h = \pi r^2\ .\ h = \pi\ .\ 5^2\ .\ 20 = 500\pi\ cm^3$

Logo $\frac{V1}{V2} = \frac{1000\pi}{500\pi} = 2$

Gabarito: B

13) $V1 = 1{,}6\ .\ V_2$

$V1 = \pi\ .\ 6^2\ .\ 4 = 144\pi\ cm^3$

$V2 = \pi\ .\ 3^2\ .\ x = 9\pi x\ cm^2$

Então, teremos:

$144\ \pi = 1{,}6\ .\ 9\pi x$

$144\ \pi = 14{,}4\pi x$

$X = \frac{144}{14{,}4} = 10\ cm$

Gabarito: B

14) Volume = Área da Base x Altura

Volume = Área da Base x 40

Divida a parte cortada obliquamente em duas partes; uma sendo um cilindro reto de altura 22 cm e a outra metade de um cilindro reto de altura 4 cm (26 – 22).

Dessa forma, o Volume desse pedaço será:

Volume = Volume(1) + Volume(2)

Volume = Área da Base x Altura + <u>Área da Base x Altura</u>/2

Volume = Área da Base x 22 + <u>Área da Base x 4</u>/2

Volume = Área da Base x 22 + Área da Base x 2

Volume = Área da Base x (22 + 2)

Volume = Área da Base x 24

Sabendo que o salame pesa 1 kg, calculamos o peso desse pedaço corta obliquamente:

Volume ------------- ------------- Kg

Área da Base x 40 ------------- 1

Área da Base x 24 ------------- R

Área da Base x 40 x R = 1 x Área da Base x 24

40 x R = 24

R = 24 / 40

R = 0,6 kg

R = 600 g

Gabarito: A

Habilidades do ENEM:

15) A

Aprofundando:

16) Como a coleta deverá aumentar em 20%, então o volume aumentará 20%, assim, o volume que era V = 2 . 1 . 1 passará a ser 1,20V = 1,20 . 2 . 1 . 1, logo o novo volume será V' = 2 . 1. 1,20, assim, aumentando a altura para 1,20 m.

Gabarito: B

17) O volume de manteiga da marca 1 é dado por:

$V1 = 10\ .\ 6\ .\ 4 = 240\ cm^3$

$V2 = 5\ .\ 6\ .\ 7 = 210\ cm^3$

Logo, a diferença é de $30\ cm^3$

Gabarito: C

18) 1 m³ = 1000 litros, logo, um carro-pipa que comporta 8000 litros possui volume de 8 m³.

O reservatório tem 3 . 5 . 1 = 15 m³ de volume, logo sua capacidade é de 15.000 litros. Assim, dois carros-pipas comportam 16.000 litros de água, isto é, 1.000 litros a mais do que a capacidade do reservatório.

Gabarito: D

19) Primeiro devemos saber em que altura estava a água com 600 L. Assim, teremos:

600 L = 600 dm³

Como cada lado do cubo é de 10 dm, teremos:

10 . 10 . x = 600

X = 6 dm = 0,6 m

Como depois de colocar o objeto o nível subiu para 0,8 m, então o volume será dado por:

V = 1 . 1 . 0,2 = 0,2 m³

Gabarito: A

20) O volume 1 é o de um paralelepípedo retângulo e o volume 2 o de um prisma triangular. Temos:

Volume 1:

$V_1 = .\ (Ab.H) = (axbxc) = abc$

Volume 2:

$$V_2 = (Aa.H) = \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2} \times \frac{c}{2}\right) \times b\right) = \frac{abc}{8}$$

A razão será:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{abc}{8}}{abc} = \frac{abc}{8} \cdot \frac{1}{abc} = \frac{1}{8}$$

21) Observando a figura 2 do enunciado, nota-se que o lado deste triângulo é exatamente l=x, pois sua base AB coincide com um dos lados da face quadrada do cubo.

$$.A = x^2\frac{\sqrt{3}}{4};\ V = xA = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}$$

Sabemos que o volume do cubo é x³, então:

$$.x^3 = 2(4 - \sqrt{3}) + \frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \frac{32 - 8\sqrt{3} + x^3\sqrt{3}}{4}$$

$$.4x^3 - \sqrt{3}x^3 = 32 - 8\sqrt{3}$$

$$.x^3(4-\sqrt{3}) = 32 - 8\sqrt{3}$$

$$.x^3 = \frac{32-8\sqrt{3}}{(4-\sqrt{3})} = 8$$

$$.x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

Gabarito: A

22) C

23) E

24) E

25) A planificação desse cubo é o número III, logo, gabarito é C.

26) $V1 = \pi.r^2.h1$ e $V2 = 2.\pi.r^2.\frac{h1}{3}$

$V1 - V2 = .\pi.r^2.\frac{h1}{3}$

$.\pi.r^2.h1$ ---- 30 min

$.\pi.r^2.\frac{h1}{3}$ -- x

.x = 10 min

Logo, o tempo para encher totalmente será de t = 30 + 10 = 40 min

Gabarito: C

27) Calculando o volume do copinho, c = π. 2².4 = 16π, e o volume L da leiteira, L = π. 4². 20 = 320π, ambos os valores em cm³, e dividindo L por “c”, obtêm-se o número de copinhos por leiteira, assim, serão 20 copinhos por leiteira. Com esse resultado se conclui que uma leiteira corresponde ao mesmo volume de 20 copinhos plásticos, logo, para encher 20 copinhos plásticos pela metade, é suficiente encher uma leiteira pela metade.

Gabarito: A

28) $V = \pi,r^2.h = \pi.4^2.h = 16\ 16\sqrt{3} \rightarrow h = 4\sqrt{3}$

No ponto de interseção do eixo do cilindro com a superfície líquida (ponto A) a altura da água não varia (em relação à base).

Seja “O” o centro da base superior do cilindro e seja B o ponto onde a água está prestes a derramar:

$AO = H - h = 2\sqrt{3}$

OB = 2

$$Tg(AOB) = \frac{AO}{OB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow AOB = 60^o$$

29) C

30) A

31) D

32) E

Desafiando:

33) Em relação ao cubo, sabe-se que:

área do retângulo ABCD = $32\sqrt{5}$ dm²

$\overline{EF} = \overline{CD} = 8$ dm

Portanto:

$32\sqrt{5} = \overline{AD} \times 8$

$AD = 4\sqrt{5}$ dm

Em relação ao triângulo retângulo AED, tem-se que:

$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2$

$(4\sqrt{5})^2 = (AE)^2 + 8^2$

$80 - 64 = \overline{AE}^2$

$\overline{AE} = 4$ dm

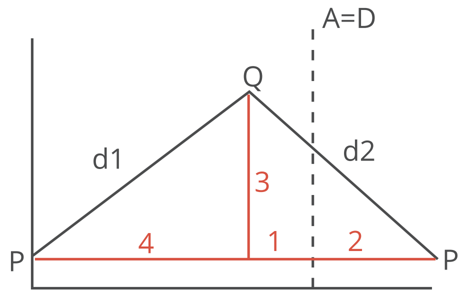
O volume de água no cubo é igual ao volume do prisma de base triangular AED e altura $\overline{AD}$, então:

V_{PRISMA} = (área da base) x (altura)

$$V_{PRISMA} = \frac{AE \times ED}{2} \times CD$$

$$V_{PRISMA} = \frac{4 \times 8}{2} \times 8 = 128 \text{ dm}^3$$

Temos as duas situações possíveis para o caminho dessa formiga:



Fazendo Pitágoras, temos:

$d1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$d2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

Como d2 < d1, então o menor caminho é $3\sqrt{2}$.

34) A distância mais curta entre dois pontos é uma linha reta.

Assim, formamos uma reta ligando P a Q.

Essa reta é a hipotenusa de um triângulo, cujo os catetos medem 3 cm e 4 cm.

Logo:

$PQ^2 = PE^2 + QE^2$

$X^2 = 3^2 + 4^2$

$X^2 = 9 + 16$

$X^2 = 25$

$X = \sqrt{25}$

$X = 5$ cm

Portanto, o caminho tem 5 cm de comprimento.

Habilidades do ENEM:

35) C

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Geometria espacial: pirâmides, cones e esferas

Conteúdo:

- Pirâmides;
- Cones;
- Sólidos de revolução;
- Troncos;
- Sólidos semelhantes;
- Esferas.

Objetivos de aprendizagem:

• Apresentar os conceitos básicos de pirâmides, cones e esferas, com suas referidas planificações;

• Relacionar seus principais elementos, expandindo a percepção geométrica dos sólidos;

• Estabelecer fórmulas de áreas e volumes para esses sólidos, bem como relacionar sólidos semelhantes;

• Construir cones e esferas a partir da rotação de figuras geométricas planas;

• Realizar cortes em pirâmides e cones e apresentar as principais noções de troncos.

Praticando:

1) Seja L/2 metade do lado do quadrado da base; por Pitágoras temos:

$(L/2)^2 + 137^2 = 179^2$

$L^2/4 = 179^2 - 137^2 = 13.273$

$L^2 = 4 \times 13.273 = 53.088$

Gabarito: D

2) $(L\sqrt{3})/2 = 3\sqrt{3}$

$.L\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \rightarrow L = 6$

Agora, encontrando a altura da pirâmide, temos:

$.(3\sqrt{3})^2 = h^2 + 3^2$

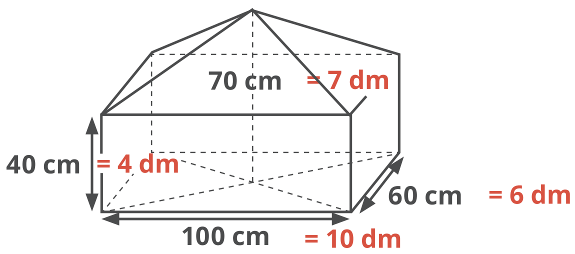
$.h^2 = 27 - 9 = 18 \rightarrow h=\sqrt{18}$

Logo, podemos encontrar o volume dessa pirâmide, assim:

$.V = 1/3 \ . Ab . h = (36.\sqrt{18})/3 = 36\sqrt{2}$

Gabarito: B

3) Observe a figura a seguir:



A figura é composta de um paralelepípedo retângulo e de uma pirâmide. Logo:

$V = a.b.c + 1/3 . S_{base} . h \rightarrow V = 4.10.6 + 1/3 . (10.6).3$
$\rightarrow V = 240 + 60 \rightarrow V = 300 \text{ dm}^3$

Como são 20 anos, o volume médio = 300/20 = 15 dm³/ano.

Gabarito: D

4) O comprimento do setor circular é igual ao comprimento da circunferència da base.

$360 \rightarrow 2.\pi.10$

$252 \rightarrow x$

$360x = 20.252.\pi$

$x = 14\pi$

$14\pi = 2.\pi.r$

$r = 7$

Assim, letra B.

5) $100\pi mL = 100\pi \text{ cm}^3$

$V =100 \rightarrow 1/3 . 5^2 . h = 100$

$h = 12$ cm

Gabarito: C

6) Como os sólidos são semelhantes, a razão entre seus volumes é igual ao cubo da razão entre suas alturas, e a razão entre sua áreas é igual ao quadrado da razão entre suas alturas. Se o pacote maior tem volume V, área total AT e altura H, e o menor tem volume v, área total at e altura h, então:

$V/v = (H/h)^3 \rightarrow H/h = (V/v)^{1/3}$

$^AT/^at = (H/h)^2$

Portanto:

$^At/^at = [(V/v)^{1/3}]^2 = (V/v)^{2/3}$

Como V = 2v, então:

$^AT/ ^at = (2v/v)^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

Gabarito: B

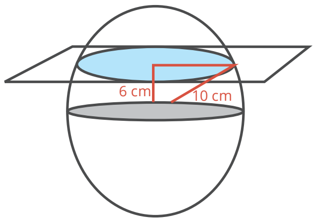
7) a) $V = 1/3\ \pi r2^2 12 = 16\pi$

b) $V_{iliquido}/16\pi = (x/12)^3 \leftrightarrow V_{iliquido} = x^3\pi/108$

Habilidades do ENEM:

8) B

9) Observe a situação citada:



Encontrando o raio da região em azul claro, temos:

$.r^2 + 6^2 = 10^2$

$.r^2 = 100 - 36 \rightarrow r^2 = 64 \rightarrow r = 8cm$

Logo a área será:

$.A = \pi.r^2 = \pi.8^2 = 64\ \pi\ cm^2$

10) Volume do cilindro = $\pi 12^2.15$

Volume da esfera = $4/3.\pi R^3$

$4/3.\pi.R^3 = \pi.12^2.15 \rightarrow 4.R^3/3 = 144.15 \rightarrow R^3 = 144.15.3/4 \rightarrow R^3 = 1620 \rightarrow R = \sqrt[3]{1620}$

$R = 3.\sqrt[3]{60}$

Gabarito: D

11) A área total de uma cunha esférica é a soma da área do fuso esférico somado com as áreas dos semicírculos das laterais, assim, temos:

$.A = 20/360\ .\ 4\pi.2^2 + \pi\ .\ 2^2 = 8\pi/9 + 4\pi = 44\pi/9\ m^2$

12) a)$126\pi\ cm^2$

b) 2/3

13) Trata-se de um círculo inscrito em um quadrado. Logo, o diâmetro do círculo é igual ao lado do quadrado.

Tendo a área do cubo, vamos calcular o valor de sua aresta:

$a = 6\ .\ a^2$

$54 = 6\ .\ a^2$

$a^2 = 54/6$

$a = 3$

Então, a = D = 3

Quanto ao cálculo do volume, devemos considerar que aresta do cubo é igual altura do cone.

$V = 1/3\ \pi R^2\ .\ h = 1/3.3.(1,5)^2\ .\ 3 = 27/4$

Gabarito: D

14) $3\sqrt{3}$.

15) $4\pi/3\ cm^3$

Habilidades do ENEM:

16) C

Aprofundando:

17) Volume da pirâmide: 1/3 . Ab . h

Seja "a" o lado do cubo.

Área da base = $a*a = a^2$

A altura da pirâmide é também a aresta do cubo logo "a".

Volume pirâmide = $a^3/3 = 6$

Como o volume da pirâmide é 6 então "a" = $\sqrt[3]{18}$

Volume do cubo = a^3

Logo volume do cubo é $18m^3$

Gabarito: D

18) Sendo a hipotenusa a altura do triângulo face da pirâmide, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 3^2$

$a^2 = 16 + 9$

$a^2 = 25$

a = 5 m – altura do triângulo que é face da pirâmide.

Área deste triângulo

A = b.h/2

A = 8.5/2

A = $20m^2$ Temos 4 áreas iguais a esta, logo, nossa área a ser coberta é de $80m^2$.

Precisamos comprar 80 lotes = 10 que são perdidos, assim, 90 lotes.

Gabarito: A

19) O artesão afirmou que uma das faces da peça formada é pentagonal, ou seja, possui cinco lados. As únicas alternativas que justificam o fato de uma das faces possuir cinco lados são as opções C e D. A pirâmide de base quadrada possui além da base, quatro faces laterais, totalizando em cinco. Porém o polígono resultante da interseção do plano com a pirâmide será pentagonal somente se o plano interceptar todas as cinco faces dessa pirâmide.

Gabarito: C

20) O único ponto mencionado que não pertence a base é o ponto E, logo deve ser projetado em relação à base. Sua projeção é feita a partir de uma reta perpendicular a base passando pelo ponto E, sendo o centro da base. A projeção do trajeto descrito por João vai do vértice A a projeção do ponto E, centro da figura, passando pelo ponto médio (M) do outro lado da base, seguindo até o vértice C, sempre em linha reta.

Gabarito: C

21) a) A pirâmide P1 está totalmente submersa. Logo o aumento de 1cm na altura está associado ao volume deslocado de água pela pirâmide.

VP1 = (25x25x1) = 652 cm³

b) Nesse caso a pirâmide P2 não está totalmente submersa. O volume deslocado que ocasionou a elevação da altura da água em 2cm foi devido ao volume do tronco submerso. O nível da água em 20cm pode ser considerado como a representação do plano paralelo à base que corta a pirâmide a 10cm do vértice (30cm – 20cm). Temos:

I) Volume do tronco = volume de água deslocado: V_T = (25x25x2) = 1250 cm³

II) Relação entre volumes da pirâmide menor (V1) e a inteira (VP2) com suas alturas: $V_1/VP_2 = (10/30)^3 \rightarrow VP_2 = 27 \cdot V_1$

III) Volume do tronco = VP2 – V1. Logo o volume de P2 vale VTRONCO + V1. Efetuando os cálculos, vem:

$V_{P2} = V_{TRONCO} + V_1 \rightarrow 27.V_1 = 1250 + V_1 \rightarrow 26.V_1 = 1250 \rightarrow V_1 = 1250/26 = 625/13$ cm³

$V_{P2} = 1250 + 625/13 = \underline{16250+625}/13 = \underline{16875}/13$ cm³

22) $V_{Ralador} = 1/3 \cdot \pi.4^2.10 = 160\pi/3$

$V_{queijo} = \alpha/360 \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \underline{384\alpha\pi}/360 = \underline{16\alpha\pi}/15$

Como o volume da fatia de queijo é 90% do volume do ralador, temos:

$. \underline{16\alpha\pi}/15 = 90\%. \underline{160\pi}/3 \rightarrow \underline{16\alpha}/5 = 144 \rightarrow \alpha = 45°$

Gabarito: A

23) A área de uma cisterna será a soma área lateral do cone com a área total do cilindro (sem a base superior coincidente com a base do cone):

I) $A_{LATERAL}$(cone) = π.R.G = (3,14).(2).(2,5) = 15,7m²

$A_{(cilindro)} = 2\pi Rh + \pi R^2$ = 2.(3,14).(2).(2) + (3,14).(4) = 25,12 + 12,56 = 37,68m²

II) $A_{(cisterna)}$ = 15,7m² + 37,68 m² = 53,38m²

$A_{(100\ cisterna)}$ = (100).(53,38)m² = 5338m²

→ Custo: (R$40,00).(5338) = R$213.520,00

Gabarito: E

24) Volume da embalagem em cm³: $V = V_{cilindro} - 2V_{cone}$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 - 2 \cdot 1/3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 135\pi - 24\pi = 111\pi$ = 333cm³ = 0,333L

Gabarito: B

25) V = 400 mL

$V/v = (H/h)^3 \rightarrow V/v = (\underline{H}/H/2) \rightarrow V/v = 8$

V = V/8 = 400/8 = 50 ml

26) O volume do sólido gerado é o volume de um cilindro circular reto de raio da base 6 cm e altura 12 cm menos o volume de um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 6 cm. Assim, temos:

$.V = Vcil - Vcone = \pi.6^2.12 - 1/3.\pi.6^2.6 \rightarrow V = 360\pi cm^3$

Gabarito: A

27) O raio da base do cilindro é o mesmo de cada esfera.

I) Volume do cilindro: $V_{cilindro} = \pi.r^2.h = \pi.r^2.(4r) = 4r.r^3$

II) Volume das esferas: $2.V_{esferas} = 2.(\underline{4}/3)\pi.r^3 = \underline{8\pi.r^3}/3$

III) Volume não ocupado: $V_{não\text{-}ocupado} = 4.\pi.r^3 - \underline{8\pi.r^3}/3 = \underline{12\pi.r^3 - 8\pi.r^3}/3 = \underline{4\pi.r^3}/3$

IV) Razão procurada: $V_{não\text{-}ocupado}/V_{esferas} = \underline{4\pi.r^3/3}$ $/\underline{8\pi.r^3}/3 = \underline{4\pi.r^3}/3 \times 3/8\pi.r^3 = 1/2$

Gabarito: D.

28) Sendo o volume E de uma semiesfera igual a e o volume C de um cone igual a , e tendo os noivos solicitado que ambos os formatos de taça tenham o mesmo volume, tem-se:

$.V = \underline{4\pi r^3}/6 = \underline{\pi r^2 h}/3$

$.2/3.\pi.r = \underline{\pi r}/3 \rightarrow 2r = h \rightarrow 2.3 = h \rightarrow h = 6$ cm.

Gabarito: B

29) Considere r como sendo o raio da esfera, logo, temos: $6 \cdot 2r = 30 \rightarrow r = 5/2$

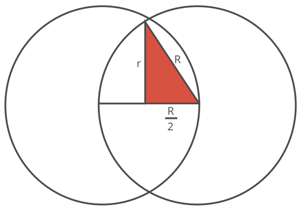
O volume de cada esfera é dado por: $V = 4/3 \cdot \pi \cdot (5/2)^3 = 125\pi/6$

Razão entre os volumes das 216 esferas e o volume da caixa será:

$216.\underline{125}/\underline{6}$ / 30. 30 . 30 = $\underline{4500\pi}/30^3 = \underline{5\pi}/30 = \pi/6$

Gabarito: A.

30) Observe a figura:



No triângulo vermelho, temos:

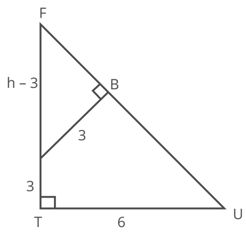
.$r^2 + (R/2)^2 = R^2 \rightarrow r^2 = \underline{3R}/4$

A área pedida será a área do círculo, então:

.$A = \pi r^2 = \underline{\pi.3R^2}/4 = \underline{3\pi R^2}/4$

Gabarito: C

31) Analisando a situação, conseguimos chegar nesse esquema:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

.$FU^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow FU = \sqrt{h^2 + 36}$

Pelo enunciado da questão (como a área do círculo é igual à da superfície esférica) podemos escrever:

.$A = 4\pi.3^2 = \pi r^2 \rightarrow r^2 = 36 \rightarrow r = 6$.

Observando a figura percebemos que os triângulos FAB e FTU são semelhantes, assim, temos:

Razão: MT/AN = 6/3 = 2

. $h-2/\sqrt{h^2+36} = 3/6 = 1/2 \rightarrow \sqrt{h^2 + 36} = 24 - 6\ h^2 + 36 = 4h^2 - 24h + 36$

. $3h^2 - 24h = 0 \rightarrow 3h(h-8) = 0 \rightarrow h = 8$

Gabarito: C

32) Há no total (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21 semiesferas. Considere R o raio da esfera e a, a aresta do cubo. Utilizando as fórmulas do volume da esfera e do cubo, temos:

$$\begin{cases} V_{(semiesfera)} = V_{(esfera)}/2 = 1/2\ .\ (\underline{4.\pi.R^3}/3) = 4.\pi.R^3/6 = 2.\pi.R^3/3 \rightarrow 21.(2.\pi.R^3/3) = 4{,}2\%.(a^3) \rightarrow V_{(cubo)}\ a^3 \\ \rightarrow 7.(2.3.R^3) = 42.a^3/1000 \rightarrow 42.R^3 = 42.a^3/1000 \rightarrow R^3 = a^3/1000 \rightarrow a^3/R^3 = 1000 \rightarrow a/R = \sqrt[3]{1000} = 10 \end{cases}$$

Gabarito: D

33) Olhando para o triângulo retângulo formado, temos que a altura do cilindro é dada por $h = r\ .\ \text{sen}\theta$ e o raio da base desse cilindro é dado por $r' = r\cos\theta$.

A área lateral do cilindro é dada por:

.$Al = 2\pi Rh = 2\pi r'h = 2\pi.r.\cos\theta.r.\text{sen}\theta = 2\pi r^2\cos\theta.\text{sen}\theta$

.$2\pi r^2\cos\theta.\text{sen}\theta = \pi r^2.\text{sen}2\theta$

Como queremos área máxima, teremos $\text{sen}2\theta=1$, assim, a área máxima é $S=\pi r^2$

Desafiando:

Habilidades do ENEM:

34) E