

ORIENTADOR METODOLÓGICO**Matemática Financeira****Conteúdo:**

- Porcentagem;
- Juros Simples;
- Juros Compostos.

Objetivos de aprendizagem:

- Calcular porcentagens e aprender a utilizar fatores de atualização;
- Diferenciar porcentagens em relação a bases diferentes de valores;
- Aprender os conceitos e diferenças entre juros simples e juros compostos;
- Identificar e calcular o valor do dinheiro no tempo através dos juros.

Praticando

1)

a) $30.000 \text{ ----}100\%$

$x \text{ -----}15\%$

$100x = 30.000 \times 15$

$X = 300 \times 15$

$X = 4500 \text{ reais}$

b) $30.000 - 4.500 = 25.500 \text{ reais}$

2) A – Vamos usar números aproximados:

$TvA + TvB + TvC + TvD + Nenhum$

$35 + 35 + 20 + 100 + 18 = 208$

$208 \text{ -----} > 100\%$

$35 \text{ -----} > x$

$208 \cdot x = 3500$

$x = 3500/208$

$X = 16,8$

Portanto, aproximadamente 15%

3) B

Votos brancos e nulos = $9\% + 11\% = 20\%$

Votos válidos = 80% do total

51% foram dados ao candidato vencedor =

$51\% \text{ de } 80\% = 0,80 \times 0,51 = 0,408 = 41\%$

4) C

10 kg – 95% de água, logo 9,5 kg de água e 0,5 kg de massa sólida.

$10 \text{ ----}100\%$

$x \text{ -----} 95\%$

$100x = 950$

$X = 9,5$

Como a parte sólida não se altera, e sabemos que agora ela representa 10%, pois a água é 90%, temos:

$0,5\text{kg} \text{ ----}10\%$

$x \text{ -----}100\%$

$10x = 50$

$X = 5 \text{ kg}$

5) B

Se 40% foi curado, logo 60% não foram completamente curados.

Dividindo os 60 em dois grupos de 30%

Primeiro tratamento inovador = 35% dos pacientes foram curados = $0,3 \times 0,35 = 10,5\%$ pacientes curadosSegundo tratamento inovador = 45% foram curados = $0,3 \times 0,45 = 13,5\%$ curados.

$10,5\% + 13,5\% = 24\%$

6) A

Janeiro: Suponha que sejam 100 ovos: 50 ovos brancos e 50 ovos vermelhos

Fevereiro:

Ovos brancos diminuíram 10%, ou seja, $50 - 10\% \times 50 = 50 - 5 = 45$ Ovos vermelhos aumentaram 20%, ou seja, $50 + 20\% \times 50 = 50 + 10 = 60$

Março:

Ovos brancos diminuíram 10%, ou seja, $45 - 10\% \times 45 = 45 - 4,5 = 40,5$ Ovos vermelhos aumentaram 20%, ou seja, $60 + 20\% \times 60 = 60 + 12 = 72$

$$\frac{\text{Ovos vermelhos}}{\text{Total de ovos em março}} = \frac{72}{72 + 40,5} = \frac{72}{112,5} = 0,64 = 64\%$$

7) A

8) E

9) C

Habilidades do ENEM:

10) A

11) $J = Cit$

$$J = 400 \times 0,04 \times 3$$

$$J = 48$$

$$M = C + J$$

$$M = 400 + 48$$

$$M = 448$$

12) C

13) a) 740 --- 100%

$$703 \text{ --- } x\%$$

$$740x = 70300$$

$$X = 70300/740$$

$$X = 95\%$$

Se 703 reais representa 95% do valor inicial, foi dado um desconto de 5%.

b) $J = 740 \times 0,0025 \times 20$

$$J = 37$$

$$M = 740 + 37$$

$$M = 777 \text{ reais}$$

14) $M = C \cdot (1 + i)^t$

$$M = 1000 \cdot (1 + 0,1)^3$$

$$M = 1000 \cdot (1,1)^3$$

$$M = 1000 \cdot (1,1)^3$$

$$M = 1331 \text{ reais}$$

$$J = M - C$$

$$J = 1331 - 1000$$

$$J = 331 \text{ reais}$$

15) a) $M = 7400 \cdot (1 + 0,006)^{11}$

$$M = 7400 \cdot (1,006)^{11}$$

$$M = 7400 \cdot 1,068$$

$$M = 7400 \cdot (1 + 0,006)^{11}$$

$$M = 7903,20$$

b) $M = 10.000 \cdot (1 - 0,02)^{11}$

$$M = 10.000 \cdot (0,98)^{11}$$

$$M = 8007,31$$

c) Não poderá comprar, pois tem R\$ 7903,20, mas a moto custará R\$8007,31, ou seja, Antônio necessita de R\$104,11 para fazer essa compra.

16) a) Tem-se desconto de 3%, então compra representará 97% do valor original, ou seja, $2400 \times 0,97 = 2328$ reais.

b) Como o valor à vista é R\$2328,00 e foi feita uma entrada de 1200,00, faltaria ser pago R\$1128,00. Mas será pago outra parcela de R\$1200,00. Ou seja, o valor q faltava sofre um juros no tempo igual 1 mês

$$M = C + J$$

$$1200 = 1128 + 1128 \times i \times 1$$

$$72 = 1128 \times i \times 1$$

$$72 / 1128 = i$$

$$0,064 = i$$

$$I = 6,4\%$$

17) B

18) C

$$2 \text{ meses} = M = 20000 (1 + 0,02)^2 = 20000 \times 1,022 = 20.808$$

3 meses = $20.808 \times 1,02 = 21224,16$, percebe que sobra 224,16, aproximadamente 225 reais.

19) C

Habilidades do ENEM:

20) B

Aprofundando:

21) C

$$\text{Tamanho original} \times 50 = 1,53 \text{ m}$$

$$\text{Tamanho original} = 1,53/50$$

$$\text{Tamanho original} = 0,0306 \text{ m} = 3,06 \text{ cm}$$

22) B - Vamos usar dados aproximados para saber a participação percentual da energia elétrica para energia total:

$$1970: \frac{\text{energia elétrica}}{\text{energia total}} = \frac{2 \times 10^6 \text{ tep}}{2 \times 10^6 \text{ tep}} = 10\%$$

$$1995: \frac{\text{energia elétrica}}{\text{energia total}} = \frac{2 \times 10^6 \text{ tep}}{2 \times 10^6 \text{ tep}} = 60,6\%$$

23) C

24) C

25) D

26) A

27) E

28) B

29) B – Como 75% afirma ter esse hábito e 26% é quem faz 3 vezes na semana, queremos 26% dos 75%, logo: $26/100 \cdot 75/100 = 0,195 = 19,5\%$

30) C

31) B

32) C

Produção do Brasil e Estados Unidos é 88%.
Estados Unidos produziram em 2009 metade da produção de 2006, ou seja, 22,5%.

Produção do Brasil deve aumentar de 43% para 65,5%, aumento este que equivale a $65,5\% / 43\% = 1,523 - 1 = 52,3\%$.

33) B

$$L = P - c$$

$$L = 34 - 26$$

$$L = 8.000 \times 0,15 = 1200$$

34) E

$$\text{Remarcação} = 50 \times 0,8 = 40 \text{ reais}$$

Com cartão fidelidade = $40 \times 0,9 = 36$ reais, ou seja, teria um desconto de 4 reais.

35) D – Devemos calcular 90% do preço de cada produto tipo A, caso esse valor seja superior ao valor do tipo B, escolhe-se o tipo B, caso contrário, o tipo A.

$$\text{Arroz } 90\% \times 2,00 = 1,80 > 1,70 \text{ (tipo B)}$$

$$\text{Feijão } 90\% \times 4,50 = 4,05 < 4,10 \text{ (tipo A)}$$

$$\text{Soja } 90\% \times 3,80 = 3,42 < 3,50 \text{ (tipo A)}$$

$$\text{Milho } 90\% \times 6,00 = 5,40 > 5,30 \text{ (tipo B)}$$

36) C

$$\text{Quantia aplicada} = x$$

$$\text{Primeiro mês} = x - 0,3x = 0,7x$$

$$\text{Segundo mês} = 0,7x + 0,2 \times 0,3x = 0,76x = 3800$$

$$\text{Logo } x = 3800/0,76 = 5000$$

37) C

A é a arrecadação.

$$40\% \text{ de } A = 0,4A = \text{pagamentos dos professores}$$

$$\text{Aumento de } 5\% \text{ das mensalidades} = 1,05A$$

$$\text{Aumento de } 5\% \text{ dos professores} = 1,05 \cdot (0,4A) = 0,42A$$

Quanto corresponde o aumento dos professores no total: $0,42A - 0,4A = 0,02A$, correspondendo a 2%.

Os pais tem razão em discordar do índice de 5% de aumento, pois o aumento dos professores corresponde em um aumento de apenas 2%.

38) D

39) B

40) C

41) C

42) C

43) D

44) D

45) C

Consumo de 150 kWh custa: $150 \cdot 0,5 + 4,5 = 79,50$ reais

$$\text{Redução de } 10\%, \text{ logo, } 0,9 \cdot 79,50 = 71,55.$$

$$\text{Novo consumo será } X \cdot 0,5 + 3 = 71,55$$

$$X = 137,1$$

46) A – Os juros simples podem ser representados por uma reta crescente.

Habilidades do ENEM:

47) D

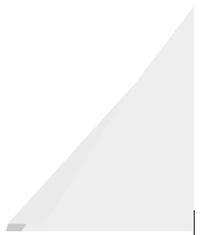
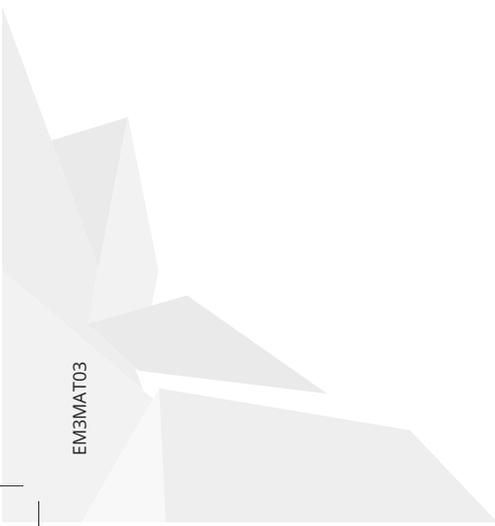
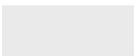
Desafiando:

48) E

$$r^4 = (1,1r)^4 = 1,4641r^4$$

$$1,4641 - 1 = 0,4641 = 46,41\%$$

49) D



ORIENTADOR METODOLÓGICO**Funções: conceitos básicos****Conteúdo:**

- Produto cartesiano;
- Relações;
- Funções;
- Classificação das funções;
- Função composta;
- Função inversa;
- Função polinomial do 1º grau.

Objetivos de aprendizagem:

- Estabelecer o conceito de produto cartesiano, e as definições de domínio, contradomínio e imagem;
- Representar produtos cartesianos no plano cartesiano;
- Identificar relações e funções a partir de produtos cartesianos;
- Conceituar e resolver funções compostas e inversas.

Praticando

1) a) $D(f) = \{1,3,5\}$

b) $CD(f) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

c) $f(3) = \frac{3^2 - 1}{2} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

d)

$$\frac{\sqrt{f(1)+f(5)+24}}{3} = \frac{\sqrt{0+12+24}}{3} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{2} = 0$$

$$f(5) = \frac{5^2 - 1}{2} = \frac{25 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

e) $Im(f) = \{0,4,12\}$

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{2} = 0$$

$$f(3) = \frac{3^2 - 1}{2} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$f(5) = \frac{5^2 - 1}{2} = \frac{25 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

f) O elemento é 5.

2) a) $P = 40 + 600/200 = 40 + 3 = 43$ reais

b) $46 = 40 + 600/n$

$$46 - 40 = 600/n$$

$$6 = 600/n$$

$$N = 600/6$$

$$N = 100 \text{ sacas}$$

3) a) meio-dia = 4 horas de trabalho

$$p(4) = 8x + 9x^2 - x^3$$

$$p(4) = 8 \cdot 4 + 9(4)^2 - (4)^3$$

$$p(4) = 32 + 9 \cdot 16 - 64$$

$$p(4) = 32 + 144 - 64$$

$$p(4) = 112$$

b) Basta fazer a diferença entre a produção até a quarta hora com a produção até a terceira hora.

$$p(3) = 8 \cdot 3 + 9(3)^2 - (3)^3$$

$$p(3) = 24 + 9 \cdot 9 - 27$$

$$p(3) = 24 + 81 - 27$$

$$p(3) = 78$$

$$p(4) - p(3) = 112 - 78 = 34$$

4) Colocar no aprofundando

$$f(x) = ka^x$$

a) (1,6) ---- $f(1) = ka^1 = 6$

$$ka = 6$$

(2,12) ---- $f(2) = ka^2 = 12$

$$ka^2 = 12$$

$$kaa = 12, \text{ como } ka = 6$$

$$6a = 12$$

$$a = 12/6$$

$$a = 2$$

$$\text{Como } ka = 6 \text{ e } a = 2$$

$$2k = 6$$

$$K = 6/2$$

$$K = 3$$

b) $f(3) = ka^3 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$

c) $f(0) = ka^0 = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3$

5) a) -5, -2, 4 e 9

b) $-5 < x < -2$ ou $4 < x < 9$ ou $x > 9$

c) $x < -5$ ou $-2 < x < 4$

d) $x = -5, x = -2, x = 4$ e $x = 9$

6) a) $x = 3$ e $x = 9$

b) Sem solução para $f(x) = 0$

- c) $0 \leq x < 3$ ou $9 < x \leq 12$
 d) $0 \leq x \leq 3$ ou $9 \leq x \leq 12$
 e) $3 < x < 9$

7) $f\left(\frac{9}{2}\right) = 2$

- b) $[-2,4]$
 c) Infinitas, pois é o intervalo $[4, 5]$, podendo ser qual número real entre esses valores.
 d) Sim.

- 8) a) 15 minutos
 b) 5 minutos

9) E

Habilidades do ENEM:

10) B

11) A

f é bijetiva = contradomínio e imagem são iguais e elementos diferentes do domínio tem imagens diferentes

g é sobrejetiva = contradomínio e imagem são iguais

h não é injetiva = elementos diferentes do domínio tem imagens iguais, logo não é injetiva.

12) $f(x) = x^2$
 $(fo[fof])$
 $Fof = (x^2)^2 = x^4$
 $(fo[x^4]) = (x^4)^2 = x^8$
 $(fo[fof]) = x^8$

13) C

$2g(x) + 1 = 6x + 5$
 $2g(x) = 6x + 5 - 1$
 $2g(x) = 6x + 4$
 $G(x) = \frac{6x + 4}{2}$
 $G(x) = 3x + 2$

14) a) $t = 2$

$v(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9$
 $d(9) = 3 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 5 = 3 \cdot 81 + 18 + 5 = 266 \text{ m}$

b) $v(t) = 4t + 1$
 $d(t) = 3(4t + 1)^2 + 2(4t + 1) + 5$
 $d(t) = 3(4t^2 + 8t + 1) + 8t + 2 + 5$
 $d(t) = 12t^2 + 24t + 3 + 8t + 2 + 5$
 $d(t) = 12t^2 + 32t + 10$

15) E - Lembre-se que o gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico da função original f em relação à reta $y = x$.

16) $f^{-1}(2) + f^{-1}(3) = 3$
 $f(1) = 2 - x = 1$ e $y = 2$
 $f(2) = 3 - x = 2$ e $y = 3$
 $f(3) = 4 - x = 3$ e $y = 4$
 $f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$

$f^{-1}(2) = 1$, pois para calcular devemos pegar o $y = 2$, pois como é a inversa, queremos o valor de x associado ao $y = 2$, que é 1.

$f^{-1}(3) = 2$, pois para calcular devemos pegar o $y = 3$, pois como é a inversa, queremos o valor de x associado ao $y = 3$, que é 2.

$f^{-1}(2) + f^{-1}(3) = 1 + 2 = 3$

17) C

Habilidades do ENEM:

18) A

Aprofundando:

19) a) $D(f) = \{2,4,6\}$

b) $CD(f) = \{0,1,2,\dots,60\}$

c) $F(4) = \frac{3 \cdot 4^2 - 2}{2} = \frac{8 - 2}{2} = \frac{46}{2} = 23$

d) $\frac{\sqrt{f(2) + f(6) + 8}}{8} = \frac{\sqrt{5 + 53 + 8}}{8} = \frac{\sqrt{66}}{8}$

$F(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2}{2} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$F(6) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2}{2} = \frac{108 - 2}{2} = \frac{106}{2} = 53$

e) $Im(f) = \{5,23,53\}$

$F(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2}{2} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$F(6) = \frac{3 \cdot 4^2 - 2}{2} = \frac{48 - 2}{2} = \frac{46}{2} = 23$

$F(6) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2}{2} = \frac{108 - 2}{2} = \frac{106}{2} = 53$

f) O elemento é 6.

20) a) [-2, 6]

b) [-3, 5]

c) 2

d) 2

e) 2

f) 5

g) 0

h) 6

i) [4,6]

j) [-2,1] ∪ [3,4]

k) [1,3]

21) $S(p) = 1 \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}}$

$S(8) = 1 \frac{11}{100} 8^{\frac{2}{3}}$

$S(8) = 1 \frac{11}{100} \sqrt[3]{64}$

$S(8) = 1 \frac{11}{100} \cdot 4$

$S(8) = 1 \frac{11}{100} \cdot 4$

$S(8) = 1 \frac{11}{100}$

$S(8) = 0,44 \text{ m}^2$

b) Superfície duplicou = $0,44 \times 2 = 0,88 \text{ m}^2$

$0,88 = 1 \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}}$

$\frac{0,88}{100} = 1 \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}}$

$8 = p^{\frac{2}{3}}$

$2^3 = \sqrt{p^2}$

$(2^3)^3 = p^2$

$2^9 = p^2$

$p = \sqrt{2^9}$

$p = \sqrt{2^9} \cdot 2$

$P = 2^4 \cdot \sqrt{2}$

$P = 16 \cdot 1,4$

$P = 22,4 \text{ kg}$

22) $f(x) = x^2 + bx + c$

$f(-2) = -5$ e $f(2) = 15$

a) B e c

$f(-2) = -5$ ----- $f(-2) = (-2)^2 + b(-2) + c$

$(-2)^2 + b(-2) + c = 5$

$4 - 2b + c = 5$

$-2b + c = 5 - 4$

$-2b + c = 1$

$f(2) = 15$ ----- $f(2) = (2)^2 + b(2) + c$

$4 + 2b + c = 15$

$2b + c = 15 - 4$

$2b + c = 11$

Sistema $\begin{cases} -2b + c = 1 \\ 2b + c = 11 \end{cases}$

$2C = 12$

$C = 12/2$

$C = 6$

$2b + 6 = 11$

$2b = 11 - 6$

$2b = 5$

$B = 5/2$

$B = 2,5$

b) $f(x) = x^2 + 2,5x + 6$

$F(0) = 0^2 + 2,5 \cdot 0 + 6$

$F(0) = 6$

c) $f(x) = x^2 + 2,5x + 6$

$F(10) = 10^2 + 2,5 \cdot 10 + 6$

$F(10) = 100 + 25 + 6$

$F(10) = 131$

23) D

Para não ter prejuízo, faturamento e custo devem ser iguais.

$FT(q) = CT(q)$

$5q = 2q + 12$

$5q - 2q = 12$

$3q = 12$

$Q = 12/3$

$Q = 4$

24) a) 17,5%

b) Abril a julho de 2000.

c) Setembro e outubro de 2000.

25) E

Perceba que entre $0 \leq x \leq 4$, temos a função $y=x$, pois os pontos (0,0) e (4,4) pertencem a essa reta.

Entre $4 < x \leq 6$, temos sempre $y = 4$.

Entre $6 < x \leq 8$, devemos descobrir a lei de formação, pois temos os pontos $(6,4)$ e $(8,0)$.

$$y = ax + b$$

$$4 = 6a + b$$

$$0 = 8a + b$$

$$\begin{cases} 6a + b = 4 \\ 8a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + b = 4(-1) \\ 8a + b = 0 \end{cases}$$

$$2a = -4$$

$$A = -4/2$$

$$A = -2$$

$$8a + b = 0$$

$$8(-2) + b = 0$$

$$-16 = -b$$

$$B = 16$$

$$Y = -2x + 16$$

a) $f(1) + f(2) = f(3)$;

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 3$$

$$f(1) + f(2) = f(3)$$

$$1 + 2 = 3$$

$$3 = 3 \text{ Verdadeiro}$$

b) $f(2) = f(7)$;

$$f(2) = 2$$

$$f(x) = -2x + 16 : f(7) = -2 \cdot 7 + 16 = -14 + 16 = 2$$

$$f(2) = f(7)$$

$$2 = 2 \text{ Verdadeiro}$$

c) $f(3) = 3f(1)$;

$$f(1) = 1$$

$$f(3) = 3$$

$$f(3) = 3f(1)$$

$$3 = 3 \cdot 1$$

$$3 = 3 \text{ Verdadeiro}$$

d) $f(4) - f(3) = f(1)$;

$$f(4) = 4$$

$$f(3) = 3$$

$$f(1) = 1$$

$$f(4) - f(3) = f(1)$$

$$4 - 3 = 1$$

$$1 = 1 \text{ Verdadeiro}$$

e) $f(2) + f(3) = f(5)$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 3$$

$$f(5) = 4$$

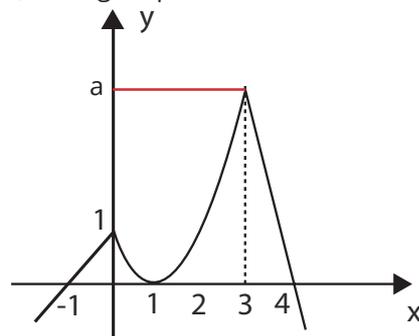
$$f(2) + f(3) = f(5)$$

$$2 + 3 = 4 \text{ Falso}$$

26) Letras A, E e F

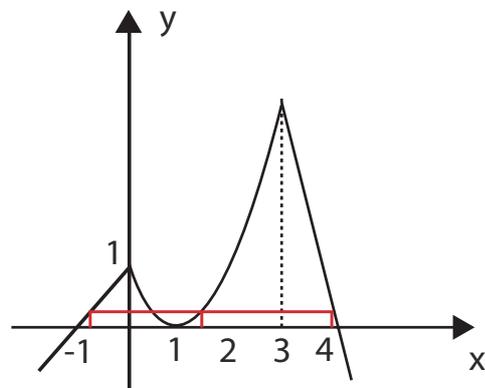
a) Verdadeiro, pois vemos que os valores de x estão no conjunto dos números reais

b) Falso, a imagem pertence ao intervalo $]-\infty, a]$.



c) Falso, a função é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$

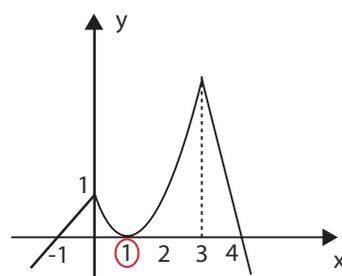
d) Falso, existem elementos diferentes do domínio com mesma imagem, como os exemplos abaixo.



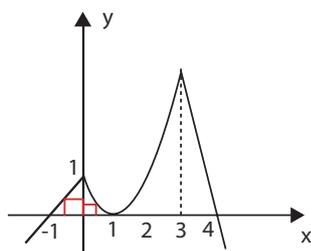
e) Verdadeira

$$F(1) = 0 - \text{verdadeiro}$$

$$F(5) < 0 - \text{verdadeiro}$$



f) Verdadeira



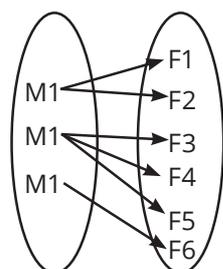
27) D

$$\begin{aligned}
 f(x) f(y) &= f(x + y) \\
 f(1) &= 2 \text{ e } f(\sqrt{2}) = 4 \\
 f(3 + \sqrt{2}) &= f(3) \cdot f(\sqrt{2}) \\
 f(3) &= f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) \\
 f(3) &= f(2) \cdot f(1) = 4 \cdot 2 \\
 f(3) &= 8 \\
 f(2) &= f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) \\
 f(2) &= f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4 \\
 f(2) &= 4 \\
 f(3 + \sqrt{2}) &= f(3) \cdot f(\sqrt{2}) = 8 \cdot 4 \\
 f(3 + \sqrt{2}) &= 32
 \end{aligned}$$

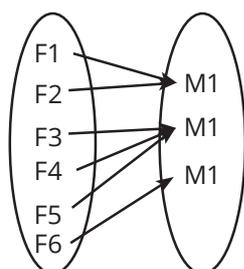
28) B

- M1 - F1 e F2
- M2 - F3, F4 e F5
- M3 - F6

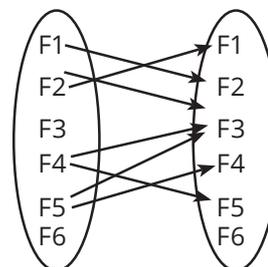
I) Não é função, porque um elemento do domínio (mães) está ligado a imagens diferentes (filhos).



II) É função porque todos os elementos do domínio (filhos) estão ligados a imagens e cada elemento do domínio está ligado apenas a uma imagem.



III) Não é função porque há um elemento do domínio (F6) que não está ligado a uma imagem e além disso, um mesmo elemento do domínio tem imagens diferentes.



29) - 2, 0 e 5/2

$$\begin{aligned}
 x^3 - 4x &\text{ se } x \leq 1 \\
 x^3 - 4x &= 0 \\
 x(x^2 - 4) &= 0 \\
 x = 0, &\text{ pode ser, pois } x \leq 1. \\
 x^2 - 4 &= 0 \\
 x^2 &= 4 \\
 x &= \pm \sqrt{4} \\
 x = \pm 2, &\text{ não podemos considerar } x = 2, \text{ pois } x \leq 1. \\
 2x - 5 &\text{ se } x > 1 \\
 2x - 5 &= 0 \\
 2x &= 5 \\
 x &= 5/2, \text{ pode ser, pois } x > 1.
 \end{aligned}$$

30) $g(x) = 6x + 7 / 2$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x - 5 \\
 f(g(x)) &= 6x + 2 \\
 2g(x) - 5 &= 6x + 2 \\
 2g(x) &= 6x + 2 + 5 \\
 2g(x) &= 6x + 7 \\
 g(x) &= 6x + 7 / 2
 \end{aligned}$$

31) $k = -1/3$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 - 2x \\
 g(x) &= 2x + k \\
 f[g(x)] &= g[f(x)] \\
 1 - 2(2x + k) &= 2(1 - 2x) + k \\
 1 - 4x - 2k &= 2 - 4x + k \\
 -2k - k &= 2 - 4x + 4x - 1 \\
 -3k &= 1 \\
 k &= -1/3
 \end{aligned}$$

32) $f(-12 / 15) = 7$

$g(x) = 2x + 3$

$g(f(x)) = 2x+5 / x+1$

$2f(x) + 3 = 2x+5 / x+1$

$2f(x) = 2x+5 / x+1 - 3$

$2f(x) = 2x+5-3(x+1) / x+1$

$2f(x) = 2x+5-3x-3 / x+1$

$2f(x) = -x+2 / x+1$

$f(x) = -x+2 / 2(x+1)$

$f(x) = -x+2 / 2x+2$

$$f\left(\frac{-12}{15}\right) = \frac{-\left(\frac{-12}{15}\right)+2}{2\left(\frac{-12}{15}\right)+2} = \frac{\frac{12}{15}+2}{\frac{-24}{15}+2} = \frac{\frac{12+2.15}{15}}{\frac{-24+2.15}{15}} = \frac{\frac{12+30}{15}}{\frac{-24+30}{15}} = \frac{\frac{42}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{42}{15} \cdot \frac{15}{6} = 7$$

33) E

$f(n + 1) = n - 1$

$N + 1 = A$

$N = A - 1$

$f(A) = A - 1 - 1 = A - 2$

$f(A) = A - 2$

$f(n - 1) = n - 1 - 2$

$f(n-1) = n - 3$

34) $f^{-1}(x) = 6x + 4 / 2x - 1$

$f(x) = x + 4 / 2x - 6$

$y = x + 4 / 2x - 6$

troque y por x

$x = y + 4 / 2y - 6$

$x(2y - 6) = y + 4$

$2xy - 6x = y + 4$

$2xy - y = 6x + 4$

$Y(2x - 1) = 6x + 4$

$Y = 6x + 4 / 2x - 1$

35) A

$f(x) = x-1 / x+2$

$y = x-1 / x+2$

troque y por x

$x = y-1 / y+2$

$x(y + 2) = y - 1$

$xy + 2x = y - 1$

$xy - y = -2x - 1$

$y(x - 1) = -2x - 1$

$y = -2x-1 / x-1$

$y = -1(2x+1) / -1(-x+1)$

$y = 2x+1 / -x+1$

$y = 2x+1 / 1-x$

36) D

Habilidades do ENEM:

37) D

Desafiando:

38) Para que a equação $f(x) = c$ tenha uma única solução deve interceptar o gráfico de f em um único ponto, ou seja, acima do ponto $(-2, 2)$ ou abaixo do ponto $(2, -4)$. Isto é, devemos ter $c > 2$ ou $c < -4$.

39) D

$g[g(4)] - g[g(-4)]$

$g(-4) = -2$

$g[g(4)] - g[-2]$

$g[-2] = 0$

$g[g(4)] - 0$

$g(4) = 2$

$g[2] = 0$

$g[2] = 2$

$g[g(4)] - g[g(-4)] = 2 - 0 = 2]$

40) B

41) D

Perceba que estamos falando de função composta, e o resultado de $f(4) = 5$, depois $f(5) = 2$, $f(2) = 1$, $f(1) = 4$ e retorna para $f(4) = 5$.

Ou seja, os resultados se repetem depois de cada quatro, então:

$2004 / 4 = 502$ ou seja esses resultados se repetem 502 e não inicia outro ciclo, então o último resultado é $f(1) = 4$.

ORIENTADOR METODOLÓGICO

**Geometria Plana:
conceitos iniciais**

Conteúdo:

- Ângulos;
- Paralelas cortadas por uma transversal;
- Polígonos;
- Triângulos;
- Cevianas e pontos notáveis do triângulo;
- Quadriláteros.

Objetivos de aprendizagem:

- Definir elementos e propriedades básicas da geometria plana;
- Conceituar polígono, seus principais exemplos e relações.

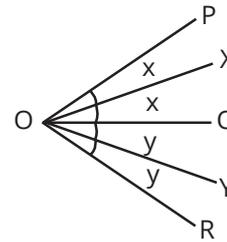
Praticando:

- 1) E
- 2) A
- 3) C
- 4) C
- 5) E
- 6) E
- 7) B
- 8) B
- 9) E

Habilidades do ENEM:

- 10) A
- 11) $AON = 50$, ou seja, $2x + y = 50$
 $NOC = 30$, ou seja, $y=30$
 $2x + 30 = 50$
 $2x = 50 - 30$
 $2x = 20$
 $x = 10$
 $AOM = x = 10$ graus

12)



$POY = 50 = 2x + y$

$XOR = 55 = x + 2y$

Sistema $\begin{cases} 2x + y = 50 \\ x + 2y = 55 \end{cases}$

$\begin{cases} (2x + y = 50)(-2) \\ x + 2y = 55 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x - 2y = -100 \\ x + 2y = 55 \end{cases}$

13) E

$X = 120 + 20 = 140^\circ$

14) A

Traçamos a reta r^3 que seja paralela às duas outras retas, dividindo o ângulo de 90 graus em duas partes.

Percebemos que o ângulo α é alterno interno do pedaço superior do ângulo de 90 graus.

O ângulo ao lado do de 130 graus é 50, pois eles são suplementares. Além disso, esse ângulo de 50 graus é alterno interno do pedaço inferior do ângulo de 90 graus.

Logo, $\alpha + 50 = 90$, então $\alpha = 90 - 50$, $\alpha = 40$ graus.

15) 6

16) 60 m, 45 m, 30 m

17) Hexágono = 6 lados

a) $n - 3 = 6 - 3 = 3$ diagonais

b) $d = (n(n - 3)) / 2 = (6(6 - 3)) / 2 = 6 \cdot 3 / 2 = 18 / 2 = 9$ diagonais

c) $Si = 180(n - 2) = 180(6 - 2) = 180 \cdot 4 = 720$ graus

d) $Se = 360$ graus

e) $ai = Si / n = 720 / 6 = 120$ graus

f) $ae = Se / n = 360 / 6 = 60$ graus

g) $n / 2 = 6 / 2 = 3$ diagonais pelo centro.

18) C

A soma dos três ângulos dos pentágonos mais o ângulo agudo do losango devem somar 360 graus.

$$\text{Ângulo agudo} = 360 - 3 \cdot 108 = 360 - 324 = 36$$

A soma dos ângulos do losango deve ser 360 graus:

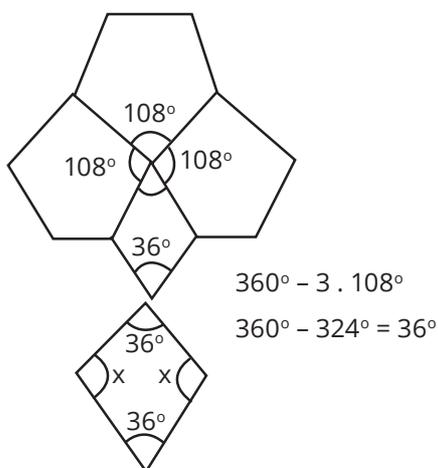
$$36 + 36 + x + x = 360$$

$$72 + 2x = 360 (:2)$$

$$36 + x = 180$$

$$x = 180 - 36$$

$$x = 144 \text{ graus}$$



19) C

Percebemos que o ângulo de 45 graus é o ângulo externo do polígono regular, então para sabermos qual é o polígono, devemos fazer:

$$ae = Se/n$$

$$45 = 360/n$$

$$N = 360 / 45 = 8 \text{ (octógono regular).}$$

Habilidades do ENEM:

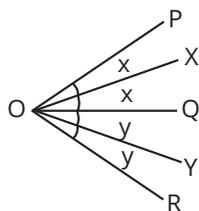
20) B

Aprofundando:

21) E

22) C

23) POR = 90 graus



$$2x + y = 65$$

$$X + 2y = 70$$

$$3x + 3y = 135 (:3)$$

$$X + y = 45$$

$$2(x + y) = 2 \cdot 45$$

$$2x + 2y = 90$$

24) São ângulos internos, logo $3x - 25 = X + 15$

$$3x - x = 15 + 25$$

$$2x = 40$$

$$X = 20 \text{ graus.}$$

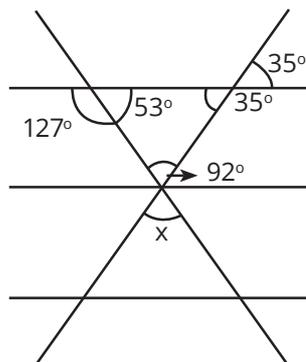
25) $x = 9$ graus

Vamos considerar o triângulo, por isso colocamos 35 graus dentro do triângulo por ser oposto pelo vértice.

Do lado do ângulo 127 graus é o ângulo suplementar, ou seja, $180 - 127 = 53$.

O terceiro ângulo do triângulo será $180 - (53 + 35) = 180 - 88 = 92$

Como o ângulo de 92 graus é oposto pelo vértice do x, então $x = 92$



26) O ângulo 75 graus e A são correspondentes, então $A = 75$.

A e B são alternos internos, $B = 75$.

C e 140 são colaterais, logo $C + 140 = 180$,

$$C = 180 - 140, C = 40$$

$$B + C + D = 180$$

$$75 + 40 + D = 180$$

$$115 + D = 180$$

$$D = 180 - 115$$

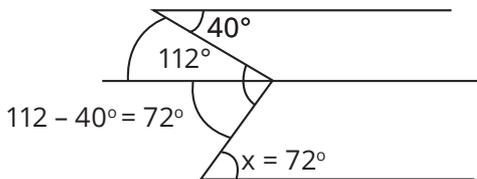
$$D = 65.$$

27) A

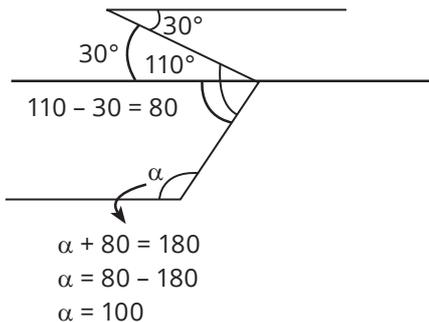
120 e a soma $(2x + 4x)$ são correspondentes, logo

$$\begin{aligned}
 2x + 4x &= 120 \\
 6x &= 120 \\
 X &= 120/6 \\
 X &= 20 \\
 B \text{ e } 4x &\text{ são colaterais, logo} \\
 B + 4x &= 180 \\
 B + 4 \cdot 20 &= 180 \\
 B + 80 &= 180 \\
 B &= 180 - 80 \\
 B &= 100
 \end{aligned}$$

28) $x = 72$ graus



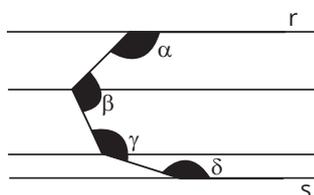
29) $\alpha = 100$



30) E

Ao traçar paralelas pelos vértices intermediários, os ângulos desses vértices ficam divididos em duas partes cada um.

Há 3 pares de ângulos colaterais internos (suplementares) e portanto $3 \times 180 = 540$.



31) $A = 130$, $b = 50$, $c = 70$ e $d = 60$

a e 130 são correspondentes, então: $a = 130$

A e $(c + d)$ são alternos internos, então: $c + d = a$, logo $c + d = 130$

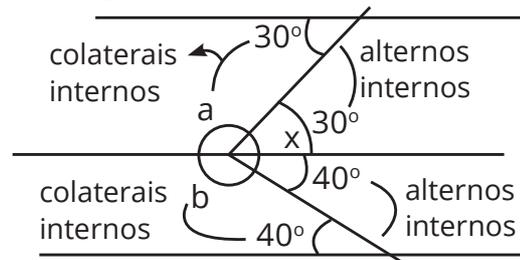
B, c e d são suplementares, então $b + c + d = 180$

Logo, como $c + d = 130$ e $b + c + d = 180$, então $b + 130 = 180$, logo $b = 180 - 130$, $b = 50$

120 e $(b + c)$ são alternos internos, então: $b + c = 120$ e como $b = 50$, então $50 + c = 120$, $c = 120 - 50$, $c = 70$

Como $c + d = 130$ e $c = 70$, então $70 + d = 130$, $d = 130 - 70$, $d = 60$

32) $x = 70$ graus



Ao prolongarmos a reta s , dividimos o ângulo x em dois pedaços. Perceba que o pedaço superior de x é alterno interno de 30 graus e o pedaço inferior é alterno interno do ângulo de 40 graus, logo o $x = 30 + 40 = 70$ graus.

33) $X = 2$ e $y = 9$

34) E

35) 16 cm

36) $\alpha = 60$ graus

Cada ângulo interno do hexágono é 120 graus, como todos os lados são iguais, descobrimos que os dois ângulos do triângulo à esquerda são 30 cada um. Temos esse mesmo raciocínio para o triângulo debaixo.

Se um pedaço do ângulo interno é 30 graus, basta fazermos $120 - 30 = 90$ graus.

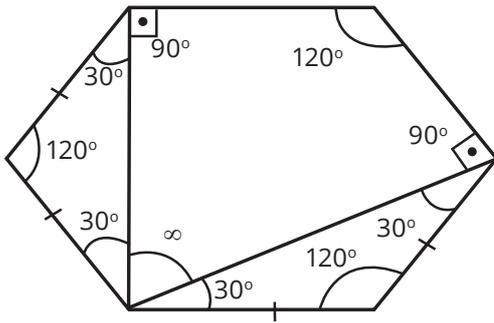
Se o ângulo é 120 graus e temos dividido em três partes e duas delas tem 30 graus cada, então:

$$30 + 30 + \alpha = 120$$

$$60 + \alpha = 120$$

$$\alpha = 120 - 60$$

$$\alpha = 60$$



37) CPD = 72 graus

$$Si = 180(n - 2) = 180(5 - 2) = 180 \cdot 3 = 540 \text{ graus}$$

$$Ai = 540 / 5 = 108 \text{ graus}$$

O triângulo ABC é isósceles e como o ângulo B é 108 graus, então $A = C$, pois $A + C + 108 = 180$, $2A + 108 = 180$, $2A = 180 - 108$, $2A = 72$, $A = 72 / 2$, $A = 36$ graus.

Usamos esse mesmo raciocínio para o triângulo BCD e temos $B = D = 36$ graus e $C = 108$ graus.

Veja que o segmento CP divide o ângulo de 108 graus em duas partes, como sabemos que a parte da direita vale 36, então a parte da esquerda é $108 - 36 = 72$ graus.

Considere o triângulo CPD, onde $D = 36$, $C = 72$, então P será:

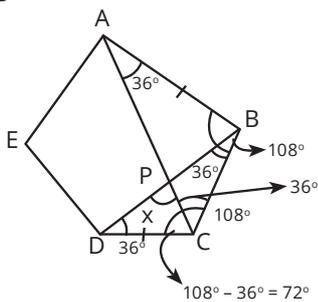
$$P + C + D = 180$$

$$P + 72 + 36 = 180$$

$$P + 108 = 180$$

$$P = 180 - 108$$

$$P = 72 \text{ graus}$$



38) $ae = Se / n = 360 / 10 = 36$

Percebemos que a bissetriz externa de B e a mediatriz formam um triângulo retângulo, então:

$$18 + x + 90 = 180$$

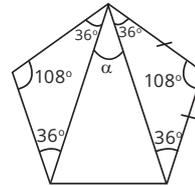
$$18 + x = 180 - 90$$

$$18 + x = 90$$

$$X = 90 - 18$$

$$X = 72 \text{ graus.}$$

39) C



$$ai = Si/n = 540/5 = 108 \text{ graus}$$

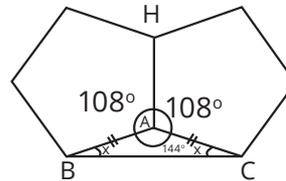
$$36 + 36 + \alpha = 108$$

$$72 + \alpha = 108$$

$$\alpha = 108 - 72$$

$$\alpha = 36$$

40) ABC = 18



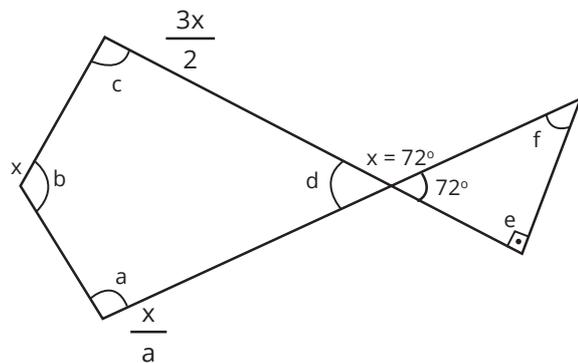
$$2x + 144 = 180$$

$$2x = 180 - 144$$

$$2x = 36$$

$$x = 18^\circ$$

41) $f = 18$ graus



$$\frac{2x}{1/2} + \frac{x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{x}{1/2} = \frac{360}{1/2}$$

$$4x + x + 3x + 2x = 720$$

$$5x + 5x = 720$$

$$10x = 700$$

$$x = 720 / 10$$

$$x = 72^\circ$$

$$72^\circ + 90 + f = 180$$

$$162 + f - 180$$

$$f = 280 - 162$$

$$f = 18^\circ$$

42) E

$$ae = Se/n = 360/7 = 51,4 \text{ graus}$$

43) D

$$ae = Se/n$$

$$20 = 360/n$$

$$n = 360/20$$

$$n = 18$$

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{18(18-3)}{2} = \frac{18 \cdot 15}{2} = 270 / 2 = 135 \text{ diagonais}$$

44) B

$$n = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$1 = \frac{(n-3)}{2}$$

$$n - 3 = 2$$

$$n = 2 + 3$$

$$n = 5$$

45) $d = \frac{2d(2d - 3)}{2}$

$$1 = \frac{2(2d - 3)}{2}$$

$$2 = 4d - 6$$

$$4d = 2 + 6$$

$$4d = 8$$

$$D = 8/4$$

$$D = 2$$

$$2 = \frac{(n - 3)}{2}$$

$$4 = n - 3$$

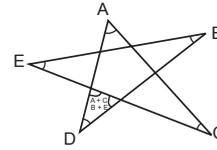
$$N = 4 + 3$$

$$N = 7$$

46) Probabilidade = diagonais que passam pelo centro / (número de diagonais = $n / 2 / n(n - 3) / 2 = n / 2 \cdot 2 / n(n - 3) = 1 / (n - 3)$)

47) C

Usamos o teorema do ângulo externo:



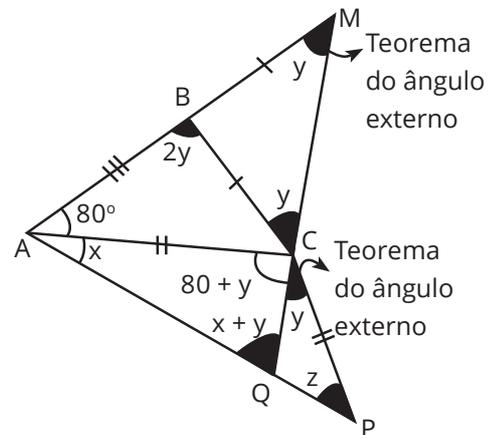
$$A + B + C + D + E = 180^\circ$$

Habilidades do ENEM:

48) A

Desafiando:

49) AQC = 50 graus



$$x + x + 80 + y + y = 180$$

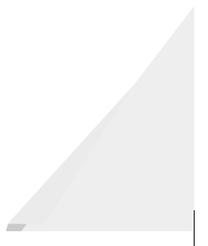
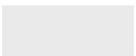
$$2x + 2y = 180 - 80$$

$$2x + 2y = 100 \quad (-2)$$

$$x + y = 50$$

$$\text{Logo } AQC = x + y = 50^\circ$$

50) B



ORIENTADOR METODOLÓGICO

**Geometria plana:
triângulos**

Objetivos de aprendizagem:

- Estabelecer as principais classificações e propriedades dos triângulos;
- Apresentar e identificar os principais segmentos e pontos notáveis de um triângulo.

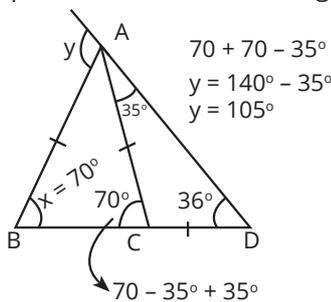
Praticando

1) $x = 70$ e $y = 105$

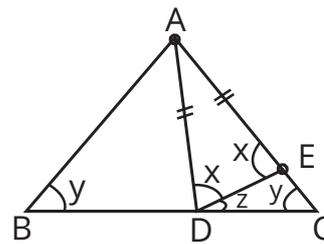
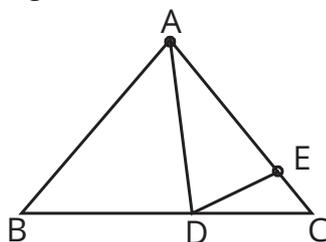
Vamos utilizar a propriedade de o ângulo externo ser a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

No triângulo ACD, o ângulo externo C é a soma dos ângulos A e D. Os ângulos A e D são iguais porque os lados AC e CD são iguais.

No triângulo ABC, o ângulo externo A é a soma dos ângulos B e C menos o ângulo de 35 graus, pois percebe-se que o ângulo A de 180 graus é dividido em três partes. Os ângulos B e C são iguais porque os lados AB e AC são iguais.



2) $CDE = 21$ graus



Como AB e AC são iguais, os ângulos também serão ambos y .

Como AD e AE são iguais, os ângulos também serão ambos x .

Perceba que no triângulo CDE, o ângulo externo E, que vale x , é igual a soma de z e y : $x = y + z$.

Considerando o triângulo ABD, como o ângulo $B\hat{A}D = 42$, a soma dele com o ângulo B é igual ao ângulo externo D, que é $x + z$: $y + 42 = x + z$

Substituindo $x = y + z$ em $y + 42 = x + z$, temos:

$$y + 42 = (y + z) + z$$

$$y + 42 = y + z + z$$

$$y - y + 42 = 2z$$

$$42 = 2z$$

$$Z = 42 / 2$$

$$Z = 21, \text{ como } z = CDE = 21 \text{ graus}$$

3) Como é pedido os valores inteiros, então: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|9 - 7| < 2x + 1 < 9 + 7$$

$$2 < 2x + 1 < 16$$

$$2 < 2x + 1$$

$$2 - 1 < 2x$$

$$1 < 2x$$

$$1/2 < x$$

$$x > 1/2$$

$$2x + 1 < 16$$

$$2x < 16 - 1$$

$$2x < 15$$

$$x < 15/2$$

$$1/2 < x < 15/2$$

$$0,5 < x < 7,5$$

Como é pedido os valores inteiros, então: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

4) B - É o incentro, pois ele é equidistante dos três lados do triângulo.

- 5) B
 $2p = 7 + 3,5 + 3,5 + 3,5 = 17,5 \text{ cm}$
- 6) 120 m
- 7) 13 cm
- 8) D
- 9) $8\sqrt{2} \text{ m}$

Habilidade do ENEM:

- 10) C
- 11) 9 cm
- 12) C
- 13) 4
- 14) D
- 15) E
- 16) B
- 17) B
- 18) B
- 19) $\overline{AB} = 40 \text{ m}$

Habilidades do ENEM:

- 20) E

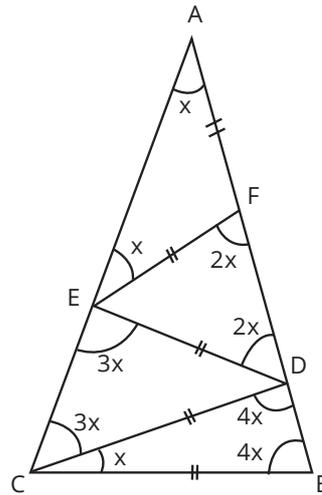
Aprofundando:

21) C
Como $AF = EF$, então os ângulos são iguais. Usamos o teorema do ângulo externo para determinar que o ângulo F do triângulo DEF, como $EF = DE$, então os ângulos são iguais.

Para determinar o ângulo E do triângulo CDE, usamos o teorema do ângulo externo novamente, mas devemos nos atentar que o ângulo externo é $4x$, mas já temos representado um x no triângulo AEF, por isso o ângulo E do triângulo

CDE será $3x$. Como $DE = CD$, então $C = 3x$ no triângulo CDE.

Para determinarmos o ângulo D do triângulo BCD, usamos o teorema do ângulo externo novamente, mas devemos nos atentar que o ângulo externo é $6x$, mas já temos representado um $2x$ no triângulo DEF, por isso o ângulo D do triângulo BCD será $4x$. Como $CD = BC$, então $B = 4x$ no triângulo BCD.



Como triângulo ABC é isósceles, então o ângulo B e C são iguais e o ângulo C do triângulo BCD será x .

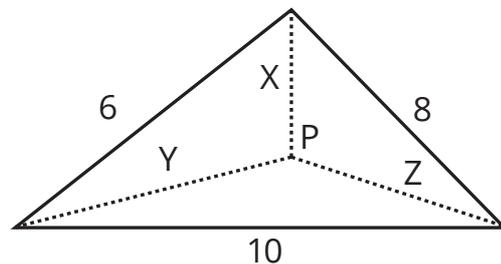
Ainda no triângulo ABC, $A + B + C = 180$, $(x) + (4x) + (3x + x) = 180$

$$9x = 180$$

$$x = 180/9$$

$$x = 20.$$

- 22) C



$$y - x < 6 < x + y$$

$$z - x < 8 < x + z$$

$$y - z < 10 < z + y$$

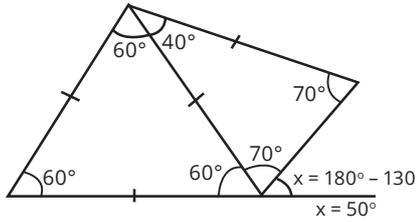
$$y - x + z - x + y - z < 24 < x + y + x + z + z + y$$

$$2y - 2x < 24 < 2x + 2y + 2z$$

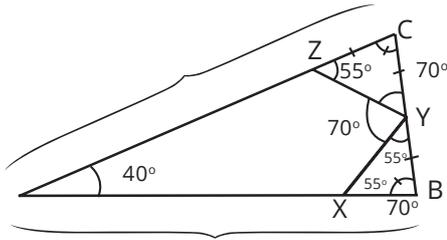
$$y - x < 12 < x + y + z$$

A soma $x + y + z$ deve ser maior que 12.

23) $x = 50$



24) D



26) $29 - 14 < 3x - 1 < 29 + 14$

$$15 < 3x - 1 < 43$$

$$15 < 3x - 1$$

$$15 + 1 < 3x$$

$$16 < 3x$$

$$16 / 3 < x$$

$$x > 5,3$$

$$3x - 1 < 43$$

$$3x < 43 + 1$$

$$3x < 44$$

$$X < 44 / 3$$

$$X < 14,6$$

$$5,3 < x < 14,6$$

Números inteiros: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

25) A

$$X + y + 80 = 180$$

$$X + y = 180 - 80$$

$$X + y = 100$$

$$2x + z = 180$$

$$2y + z = 180$$

$$X = y$$

$$X + y = 100$$

$$X = y = 50$$

$$2x + z = 180$$

$$2 \cdot 50 + z = 180$$

$$100 + z = 180$$

$$Z = 180 - 100$$

$$Z = 80$$

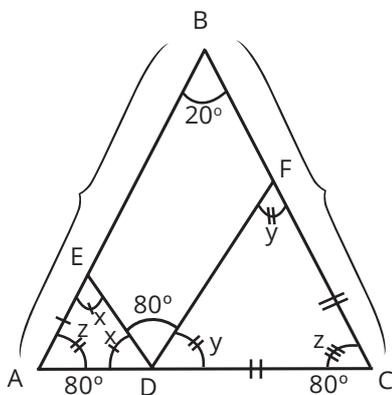
$$A + B + C = 180$$

$$80 + B + 80 = 180$$

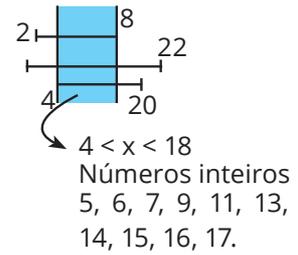
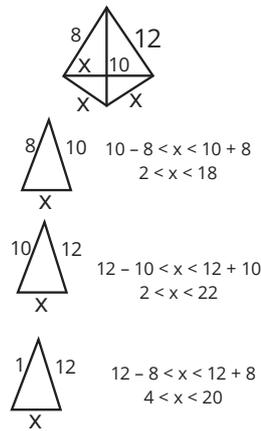
$$160 + B = 180$$

$$B = 180 - 160$$

$$B = 20$$



27) A



28) C

29) 105°

30) D.

31) D

32) D

33) 0,8 m

34) 91 cm

35) 18 cm

- 36) a) 4 cm
b) $2\sqrt{6}$ m

37) $\sqrt{7}$

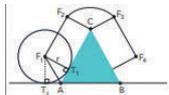
38) A

39) D

40) 100 m

41) $\alpha = 17^\circ 30'$

42)



Lado do triângulo $ABC = l \Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow l = 4$ dm

$2r = 2\sqrt{3} \therefore r = \sqrt{3}$ dm

$\overline{AT_1} = \overline{AT_2} = r \cdot \text{tg}30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \Rightarrow \overline{F_1F_2} = \overline{F_2F_3} = 4 - 1 = 3$ dm

$\widehat{F_2F_3} = 120^\circ \Rightarrow \text{comprimento } (\widehat{F_2F_3}) = \frac{2\pi r}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ dm

Comprimento total = $3 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 3 = \frac{18 + 2\pi\sqrt{3}}{3}$ dm

43) E

44) C

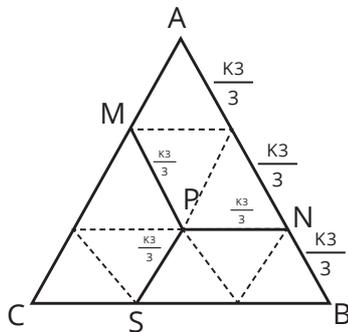
45) C

Habilidades do ENEM:

46) C

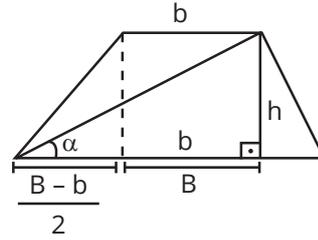
Desafiando:

47) $PM + PN + PS = K$



$$\frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} = K$$

48) Ângulo de 45 graus



$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{\frac{B-b}{2} + b} = \frac{h}{\frac{B-b}{2} + 2b} = \frac{\frac{B+b}{2}}{\frac{B+b}{2}} = 1$$

$\text{Tg} \alpha = 1$

$\alpha = 45^\circ$

49) Logo: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$

50) C